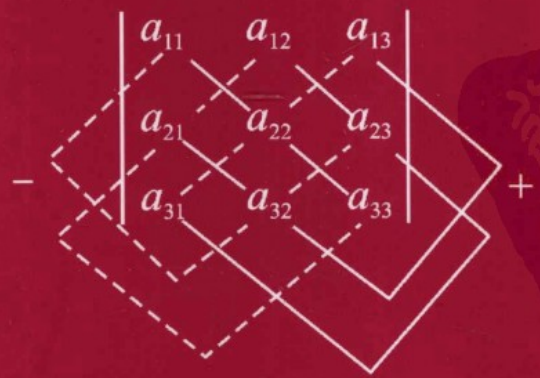
新编高等院校公共基础课系列规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

彭雪梅　杨贵诚　主编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

- 高等数学（上册）
- 高等数学（下册）
- 线性代数与概率统计
- 大学数学
- 概率论与数理统计
- 线性代数
- 复变函数与积分变换

Xianxing Daishu

策划编辑：谢荣　　责任编辑：谢荣　　封面设计：杨玲

ISBN 978-7-5609-4562-0

9 787560 945620 >

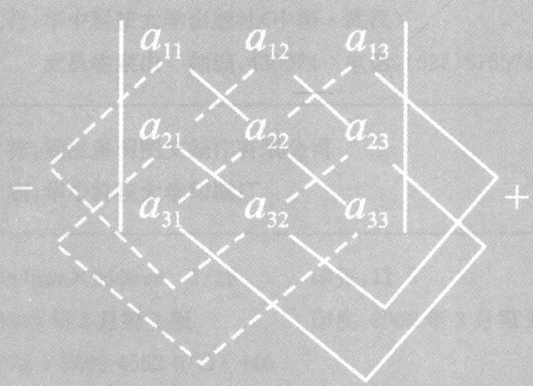
定价：20.00元

新编高等院校公共基础课系列规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　彭雪梅　杨贵诚
编　者　黄象鼎　陈桂兴　汪福宝



华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/彭雪梅　杨贵诚　主编. —武汉:华中科技大学出版社，2009年2月
ISBN 978-7-5609-4562-0

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①彭…　②杨…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 074186 号

线性代数　　**彭雪梅　杨贵诚　主编**

策划编辑:谢　荣
责任编辑:谢　荣　　封面设计:杨　玲
责任校对:朱　霞　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国・武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉星明图文制作有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×960mm　1/16　印张:11.5　字数:246 000
版次:2009年2月第1版　印次:2009年2月第1次印刷　定价:20.00元
ISBN 978-7-5609-4562-0/O・446

新编高等院校公共基础课系列规划教材编委会成员名单

（以下按拼音第一个字母的先后顺序排列）

前　　言

近年来独立学院大量涌现并快速发展，到目前为止，全国已有数百所之多。与普通高等院校培养人才的模式不同，独立学院的人才培养更侧重于应用型和技能型。教材作为实现人才培养目标的载体，对独立学院人才培养的质量有举足轻重的作用，然而独立学院的教材建设有些滞后。目前，绝大多数独立学院的教材都是选用普通高校的教材或高职高专的教材，这两类教材都不太适合独立学院的学生学习。因此，编写适合独立学院人才培养需求的教材，成为当前的重要任务。

基于上述考虑，我们编写了这本《线性代数》。本书具有以下特点。

第一，本书叙述严谨，把握基本概念的准确性，以突出数学方法的应用为核心。

第二，本书内容叙述上做了精心安排，起点较低，由浅入深、循序渐进. 对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出，增强学生的感性认识，由具体到抽象，知识过渡自然。对重要概念、定理加以注释或给出反例。从多角度帮助读者正确领会概念、定理的内涵。

第三，注重应用性。本书注意联系经济管理和自然科学中的问题，并注意举例的多样性，使学生从不同侧面理解、掌握用数学知识处理实际问题的方法，提高他们分析问题、处理问题的能力。

第四，本书配有大量习题，除每节配有紧扣该书内容的习题外，每章还配有该章内容的综合练习，习题的配置基本做到了知识点覆盖面广、难易程度适当及题型的多样性。

本教材由武汉大学东湖分校与湖北工业大学商贸学院合编，武汉大学东湖分校为主编单位。本书内容共 5 章，其中前 3 章由武汉大学东湖分校彭雪梅编写，第 4、5 章由湖北工业大学商贸学院杨贵诚编写。全书由彭雪梅统稿。

本教材可作为独立学院经济管理类本、专科专业的教学用书，也可作为普通高等院校本科少学时及专科专业的公共基础课教材。

本教材的编写得到了编者所在学校领导与教务处的大力支持与指导。陈桂兴、黄象鼎、汪福宝三位教授仔细审阅了书稿，提出了很多宝贵的意见与建议。华中科技大学出版社有关领导及谢荣编辑做了卓有成效的组织工作，在此一并表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2008 年 7 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式是线性代数中的重要概念之一，它在数学的许多分支和工程技术中有着广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶、三阶行列式的定义

行列式的概念起源于用消元法解线性方程组.

对于关于 x_1, x_2 的二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

根据这个解的特点得到启发，为了简明地表达这个解，引入了二阶行列式的概念.

定义 1　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

其中横排称为**行**，竖排称为**列**. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的**元素**. 元素 a_{ij} 的第 1 个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行；第 2 个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定规律运算所得的代数和. 这个规律表现在行列式的记号中就是“**对角线法则**”. 如图 1.1 所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

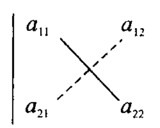


图 1.1

利用二阶行列式，线性方程组(1.1) 的解 x_1, x_2 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

注　这里的分母D是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式，称为**系数行列式**. D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中第1列的元素 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中第2列的元素 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性，请读者学习时注意比较.

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=9, \\ 3x-2y=-19. \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times3=-13\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -19 & -2 \end{vmatrix}=9\times(-2)-3\times(-19)=39,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -19 \end{vmatrix}=2\times(-19)-9\times3=-65,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{39}{-13}=-3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-65}{-13}=5.$$

类似于二元一次线性方程组的讨论，对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.3}$$

经过加减消元法，得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23},\end{aligned}$$

这个结果很难记忆. 为此，引入了三阶行列式的定义.

定义 2　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

注 由上述定义可见，三阶行列式的展开式中共有6项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图1.2所示的**对角线法则**：图中有三条实线看做是平行于主对角线的连线，三条虚线看做是平行于副对角线的连线；实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积冠负号.

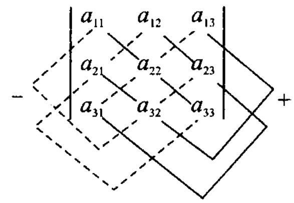


图 1.2

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$D = 1\times0\times6 + 2\times5\times(-1) + 3\times4\times0 - 3\times0\times(-1) - 1\times5\times0 - 2\times4\times6 = -58.$$

例 3 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解 按三阶行列式的定义，所求的方程即为 $x^2 - 5x + 6 = 0$，故 $x = 2$ 或 $x = 3$.

有了三阶行列式的概念，对于线性方程组(1.3)，若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

如果系数行列式 $D \neq 0$，则方程组(1.3)有唯一解，即 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, x_3 = \dfrac{D_3}{D}$.

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&1&-1\end{vmatrix}=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1$
$-1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)$
$=-5\neq0,$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&1&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-5,$$

故所求线性方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1,x_2=\dfrac{D_2}{D}=2,x_3=\dfrac{D_3}{D}=1.$

习　题　1.1

1. 计算二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}1&3\\0&0\end{vmatrix}$；　　(3) $\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}$.

2. 计算三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&5&0\\0&4&1\end{vmatrix}$.

1.2　n 阶行列式

通过 1.1 节的讨论，对于二阶、三阶行列式可用对角线法则定义. 但是，对于 n 阶行列式如果用对角线法则来定义，当 $n>3$ 时，它将与二阶、三阶行列式没有统一的运算性质. 因此，对一般的 n 阶行列式要用另外的方法来定义. 在线性代数中，采用简明的递归法来定义.

从二阶、三阶行列式的展开式中，易发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第 1 行展开，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13},\tag{1.4}$$

其中 $$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

M_{11} 是原三阶行列式 D 中划掉元素 a_{11} 所处的第1行和第1列的所有元素后剩下的元素按原来的次序排成的低一阶(二阶)行列式.称 M_{11} 为元素 a_{11} 的余子式.同理,M_{12} 和 M_{13} 分别是 a_{12} 和 a_{13} 的余子式.为了进一步使三阶行列式的表达更加规范化,令

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13},$$

A_{11},A_{12},A_{13} 分别称为元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的代数余子式.

因此,式(1.4)即为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{1.5}$$

同样, $$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}, \tag{1.6}$$

其中 $$A_{11}=(-1)^{1+1}\,|\,a_{22}\,|=a_{22},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\,|\,a_{21}\,|=-a_{21}.$$

注　定义一阶行列式 $|\,a_{11}\,|=a_{11}$(不要把一阶行列式 $|\,a_{11}\,|$ 与 a_{11} 的绝对值相混淆).

如果把式(1.5)、式(1.6)作为三阶、二阶行列式的定义,那么这种定义的方法是统一的,它们都是用低一阶的行列式定义高一阶的行列式.因此人们很自然会想到,用这种递归的方法定义一般的 n 阶行列式.对于这样定义的各阶行列式,将会有统一的运算性质.下面给出 n 阶行列式的递归法定义.

定义3　由 n^2 个数组成的 n **阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1.7}$$

是一个算式.当 $n=1$ 时,定义 $D=|\,a_{11}\,|=a_{11}$;当 $n\geqslant 2$ 时,定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, \tag{1.8}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$.M_{1j} 是 D 中去掉第1行第 j 列全部元素后剩下元素按原来次序排列成的一个 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix}a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&\cdots&a_{3,j-1}&a_{3,j+1}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}(j=1,2,\cdots,n).$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的**余子式**,A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**.

在式(1.7)中,$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**,另外一条对角线称为行列式的**副对角线**.

由定义可见,二阶行列式展开后共有2!项,三阶行列式展开后共有3!项,n 阶行列式展开后共有 $n!$ 项,其中每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积,在全部 $n!$ 项中,带正

号的项和带负号的项各占一半. 这些结论在前面的二、三阶行列式中已经证明，而对四阶以上的行列式，这些结论可以通过定义和数学归纳法证明.

例 5 计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 行列式第1行的元素 $a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{1n}=0$，由定义得 $D=a_{11}A_{11}$. A_{11} 是 $n-1$ 阶下三角形行列式，则

$$A_{11}=a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

依此类推，不难求出 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，即下三角形行列式等于主对角线上各元素乘积.

注 主对角线上(下) 方的元素全为 0 的行列式称为下(上) 三角形行列式. 除了主对角线上元素之外其余元素全为 0 的行列式，称为**主对角形行列式**. 用同样的方法可以求出主对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 6 证明

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

证明 行列式中第 1 行元素 $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n-1}=0$. 由定义得

$$D=a_{1n}A_{1n}=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3n-2} & a_{3n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{1+(n-1)}a_{2n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4n-3} & a_{4n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-3} & a_{nn-2} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地，有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}.$$

例 7　证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

证明　由定义得

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

注　此结论可推广为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

由式(1.9) 可推出

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{vmatrix} = (-1)^{nk} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

习 题 1.2

1. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

1.3 行列式的性质

行列式的计算是一个重要问题. 但是，按定义来计算 n 阶行列式，当 n 较大时，计算将变得很复杂，计算量也很大. 所以，要解决行列式的计算问题，就必须利用行列式的定义，推导出行列式的一些基本性质，并利用这些性质来简化行列式的计算. 下面来讨论 n 阶行列式 D 的基本性质，这些性质在行列式的计算及应用中都起着重要作用.

将行列式的行与列依次互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'. 本书采用记号 D^{T}.

$$\text{若 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{则 } D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

注 由此性质知，行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

性质 1 和性质 2 都可用数学归纳法来证明，但由于其证明的表述较繁，故本书略去其证明.

推论 1 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式等于零.

证明 互换相同的两行(列)，有 $D = -D$，故 $D = 0$.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 行列式中若有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2.$$

注 (1) 上述结果可推广到有限个行列式之和的情形.

(2) 行列式 D_1,D_2 的第 i 行是把 D 的第 i 行拆成两行,其他 $n-1$ 行与 D 的各对应的行完全一样.

(3) 当行列式的某一行(或列)的元素为两数之和时,行列式关于该行(或列)可分解成两个行列式.若 n 阶行列式的每个元素都表示成两数之和,则它可分解成 2^n 个行列式.

性质5 将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 加到另一行(列)对应位置的元素上,则行列式的值不变.

例如,以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1\,(i\neq j).$$

证明

$$D_1 \xlongequal{\text{性质 4}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{推论 3}} D+0=D.$$

利用这些性质可简化行列式的计算. 今后为了表示方便,记 r_i 表示第 i 行,c_j 表示第 j 列,$r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$) 表示交换第 i 行(列) 和第 j 行(列) 的元素;$r_i \times k$ ($c_i \times k$) 表示第 i 行(列) 的元素乘以数 k;$r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$) 表示第 j 行(列) 的元素乘以数 k 加到第 i 行(列) 上去. 计算行列式常用的一种方法,就是利用 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$) 把行列式化为上三角形行列式,从而算得行列式的值.

例 8 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 $$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 1\times 2\times 8\times \frac{5}{2} = 40.$$

例 9 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列的 3 个数之和均为 $3+a$. 现把第 2、3 行同时加到第 1 行,提出公因子 $3+a$,然后各行减去第 1 行,即

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3} \begin{vmatrix} 3+a & 3+a & 3+a \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (3+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} (3+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (3+a)a^2.$$

注　仿照上述方法可得到更一般的结果：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 10　计算五阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ 1 & 2 & -1 & & \\ & 1 & 2 & -1 & \\ & & 1 & 2 & -1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　方法 1：把 D_5 化为上三角形行列式.

$$D_5 \xlongequal{r_2-\frac{1}{2}r_1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ & \frac{5}{2} & -1 & & \\ & 1 & 2 & -1 & \\ & & 1 & 2 & -1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-\frac{2}{5}r_2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ & \frac{5}{2} & -1 & & \\ & & \frac{12}{5} & -1 & \\ & & 1 & 2 & -1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{5}{12}r_3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ & \frac{5}{2} & -1 & & \\ & & \frac{12}{5} & -1 & \\ & & & \frac{29}{12} & -1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_5-\frac{12}{29}r_4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ & \frac{5}{2} & -1 & & \\ & & \frac{12}{5} & -1 & \\ & & & \frac{29}{12} & -1 \\ & & & & \frac{70}{29} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \frac{5}{2} \times \frac{12}{5} \times \frac{29}{12} \times \frac{70}{29} = 70.$$

方法 2:把 D_5 按第 1 行展开,建立递推关系.

$$D_5 = 2D_4 + \begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ & 2 & -1 & \\ & 1 & 2 & -1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_4 + D_3,$$

继续用此递推关系,得

$$\begin{aligned} D_5 &= 2D_4 + D_3 = 2(2D_3 + D_2) + D_3 = 5D_3 + 2D_2 \\ &= 5(2D_2 + D_1) + 2D_2 = 12D_2 + 5D_1. \end{aligned}$$

而
$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, D_1 = | 2 | = 2,$$

故
$$D_5 = 12 \times 5 + 5 \times 2 = 70.$$

注 在本题中,D_4 不仅仅是四阶行列式,而且是与 D_5 同类型的四阶行列式.

例 11 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

反对称行列式为下列形式的行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

其特点是元素 $a_{ij} = -a_{ji} (i \neq j), a_{ii} = 0 (i = j)$.

证明 设

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

利用性质 1 及性质 3 的推论 2,有

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D.$$

当 n 为奇数时，有 $D = -D$，即 $D = 0$.

例 12 解方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} + a_{n-1} - x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix} = 0,$$

其中 $a_i \neq 0 (i = 1,2,\cdots,n)$.

解 对左端行列式，从第 2 行开始每一行都减去第 1 行得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 - x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} - x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x)$$

即

$$a_1(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_{n-2} - x)(a_{n-1} - x) = 0,$$

解得方程的 $n-1$ 个根为

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \cdots, x_{n-2} = a_{n-2}, x_{n-1} = a_{n-1}.$$

习 题 1.3

1. 用行列式的性质计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 把下列行列式化为上三角形行列式，并计算其值：

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 解下列方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

1.4　行列式按行(列)展开

高阶行列式的计算比较复杂，因此我们考虑能否将其化为低阶行列式进行计算. 本节我们介绍一种降阶法来简化行列式的计算. 在 1.2 节的 n 阶行列式的定义中，已包含这一思想，相当于按第一行展开. 本节我们考虑按任一行(列) 展开的方法. 为此，先引进余子式和代数余子式的概念.

定义 4　在 n 阶行列式 D 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，余下的 $n-1$ 阶行列式称为 D 中元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 $\boldsymbol{M}_{ij}$，再记 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$，称 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

引理　一个 n 阶行列式 D，若其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，则该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明从略.

定理 1　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ (j = 1,2,\cdots,n).$$

证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & & 0+0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据引理即得　$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \ (i = 1,2,\cdots,n).$

类似地,若按列证明可得

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ (j = 1,2,\cdots,n).$$

这个定理叫做**行列式按行(列)展开法则**. 利用这一法则并结合行列式的性质,可以简化行列式的计算.

推论　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \ (i \neq j).$$

证明　把行列式 D 按第 j 行展开,有

$$a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

上式中把 a_{jk} 换成 $a_{ik}(k = 1,2,\cdots,n)$ 可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

当 $i\neq j$ 时，上式右端行列式中有两行的对应元素相同，故行列式等于零，即得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j).$$

上述证法如按列进行，即可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j).$$

综上所述，可得有关代数余子式的一个重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D(i=j),\\0(i\neq j)\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D(i=j),\\0(i\neq j),\end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\ (i=j)\\0\ (i\neq j).\end{cases}$$

例 13 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}.$$

解 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_3]{r_1+2r_3}\begin{vmatrix}7&0&1&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\7&0&-2&-5\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第 2 列展开}}(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7&1&4\\1&1&2\\7&-2&-5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_2]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}6&0&2\\1&1&2\\9&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&2\\9&-1\end{vmatrix}=-6-18=-24.$$

例 14 计算 n 阶范德蒙(Vandermonde) 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_{n-1}^2&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_1^{n-2}&a_2^{n-2}&\cdots&a_{n-1}^{n-2}&a_n^{n-2}\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_{n-1}^{n-1}&a_n^{n-1}\end{vmatrix}\quad(n\geqslant 2).$$

解 从第 $n-1$ 行开始依次乘 $-a_n$ 加到相邻的后一行上，则

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\a_1-a_n&a_2-a_n&\cdots&a_{n-1}-a_n&0\\a_1(a_1-a_n)&a_2(a_2-a_n)&\cdots&a_{n-1}(a_{n-1}-a_n)&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_1^{n-3}(a_1-a_n)&a_2^{n-3}(a_2-a_n)&\cdots&a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_n)&0\\a_1^{n-2}(a_1-a_n)&a_2^{n-2}(a_2-a_n)&\cdots&a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n)&0\end{vmatrix},$$

再按第 n 列展开得

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{n+1}(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)D_{n-1}\\&=(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})D_{n-1},\end{aligned}$$

由此递推可得

$$\begin{aligned}D_n=&(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})(a_{n-1}-a_1)(a_{n-1}-a_2)\cdots(a_{n-1}-a_{n-2})\\&\cdots(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).\end{aligned}$$

例 15 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&-1&0&\cdots&0&0\\0&a&-1&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&-1\\1&1&1&\cdots&1&1+a\end{vmatrix}.$$

解 行列式按第 1 列展开，得

$$\begin{aligned}D_n&=a\begin{vmatrix}a&-1&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&-1\\1&1&\cdots&1&1+a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\a&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&-1\end{vmatrix}\\&=aD_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=aD_{n-1}+1,\end{aligned}$$

利用递推公式得

$$D_n=aD_{n-1}+1=a(aD_{n-2}+1)+1=a^2D_{n-2}+a+1$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2(aD_{n-3}+1)+a+1 = a^3D_{n-3}+a^2+a+1=\cdots \\
&= a^{n-2}D_2+a^{n-3}+\cdots+a+1.
\end{aligned}
$$

由于
$$D_2 = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2+a+1,$$

所以
$$
\begin{aligned}
D_n &= a^{n-2}(a^2+a+1)+a^{n-3}+\cdots+a+1 \\
&= a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1 = \begin{cases} n+1 \ (a=1) \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} \ (a\neq 1). \end{cases}
\end{aligned}
$$

例 16 求证

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}x^{n-2}.$$

证明 从第 2 行起依次乘以 -1 加到相邻的前一行上，则

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ 1 & x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{重复以上方法}} (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}x^{n-2}.$$

习 题 1.4

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 和 -2 的代数余子式.

2. 证明 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$.

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & b & a \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

1.5 克莱姆法则

在这一节，将把 1.1 节所讲的利用二阶行列式求解二元线性方程组的方法，推广到利用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组中，这个法则就是著名的克莱姆(Cramer) 法则.

在引入克莱姆法则之前，先介绍有关 n 元线性方程组的概念. 含有 n 个未知数 x_1，x_2，…，x_n 且有 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.11}$$

称为 n **元线性方程组**. 当其右端的常数项 b_1，b_2，…，b_n 不全为零时，线性方程组(1.11) 称为**非齐次线性方程组**；当 b_1，b_2，…，b_n 全为零时，线性方程组(1.11) 称为**齐次线性方程组**，

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{1.12}$$

线性方程组(1.11)的系数 a_{ij} 构成的行列式,称为该方程组的**系数行列式**,记为 D,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 2(克莱姆法则) 若线性方程组(1.11)的系数行列式 $D\neq 0$,则线性方程组(1.11)有唯一解,其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而其余各列保持不变所得到的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明从略.

例 17 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=2, \\ 2x_1-x_3+4x_4=4, \\ 3x_1+2x_2+x_3=-1, \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=-4. \end{cases}$$

解 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&2&-2\\2&0&4&4\\3&2&-1&0\\-1&2&-4&2\end{vmatrix}=0,\quad D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&0&-1&4\\3&2&1&-1\\-1&2&-1&-4\end{vmatrix}=-1,$$

所以 $\quad x_1=\dfrac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=-2,\quad x_3=\dfrac{D_3}{D}=0,\quad x_4=\dfrac{D_4}{D}=\dfrac{1}{2}.$

定理 3 如果齐次线性方程组(1.12)的系数行列式 $D\neq 0$,则它仅有零解.

证明 因为 $D\neq 0$,根据克莱姆法则,方程组(1.12)有唯一解,$x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$;又由于行列式 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 中有一列的元素全部为零,由定义 $D_j=0(j=1,2,\cdots,n)$,所以齐次线性方程组(1.12)仅有零解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}=0(j=1,2,\cdots,n)$.

定理 3' 如果齐次线性方程组(1.12)有非零解,则它的系数行列式必为零.

注 定理3(或定理3')说明系数行列式 $D=0$ 是齐次线性方程组有非零解的必要条件.第3章中还将证明这个条件也是充分的.

例 18 问 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(5-\lambda)x_1+2x_2+2x_3=0,\\2x_1+(6-\lambda)x_2\qquad\quad=0,\\2x_1+\qquad\quad(4-\lambda)x_3=0.\end{cases}$$

有非零解?

解 由定理3'可知,若所给齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式 $D=0$,而

$$D=\begin{vmatrix}5-\lambda&2&2\\2&6-\lambda&0\\2&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda),$$

由 $D=0$ 得,$\lambda=2,\lambda=5$ 或 $\lambda=8$.

注 克莱姆法则只能求解方程的个数和未知量的个数相等的线性方程组,否则不能用克莱姆法则求解.

习 题 1.5

1. 用克莱姆法则解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}2x+5y=1,\\3x+7y=2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+y-2z=-3,\\5x-2y+7z=22,\\2x-5y+4z=4;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\x_1-3x_2\qquad-6x_4=9,\\\qquad 2x_2-x_3+2x_4=-5,\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$

2. 判断齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=0,\\x_1-2x_2+4x_3=0,\\5x_1+8x_2-2x_3=0\end{cases}$$

是否仅有零解.

3. 问 λ,μ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\mu x_2+x_3=0,\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

小　　结

本章主要讨论了行列式的概念、性质，行列式的计算及克莱姆法则，其中重点是行列式的计算.

1. 行列式的计算方法

1) 用行列式定义或性质，可直接求出的行列式有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \mathbf{0}\\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\begin{vmatrix}a_{11} & & & *\\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_{nn}\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{0} & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n-1,2} & & *\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{2,n-1}a_{1n}$$

$$=\begin{vmatrix}* & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \mathbf{0}\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ b_{11} & \cdots & b_{1s} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{rs} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} & & & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ b_{11} & \cdots & b_{1s} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & & & \end{vmatrix}.$$

以上八类行列式称为**基本型**. 另一类已计算出的行列式称为范德蒙行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i).$$

2) 化简

上述方法仅局限于九类行列式,一般行列式的计算还是要利用行列式性质,包括展开定理来简化,基本思路有两种。

(1) 将行列式归结化简为上述九类行列式的表达式,利用九类行列式的结果求得. 特别地,如例 8 将行列式化为上三角形的方法,对全由数字组成的行列式具有普遍意义.

(2) 利用降阶法求解. 利用行列式性质将阶数较高的行列式的某一行(列)化为有尽可能多的零,然后按该行(列)展开,逐次降阶,而三阶、二阶行列式有简单的计算公式,从而推导出高阶行列式的计算公式. 例 13 就是用降阶法求解的.

3) 递推关系式

对于某些特殊类型的行列式,可以根据其特点找出递推关系式,从而计算出行列式的值. 例 10 和例 15 都是用这种方法计算行列式的值.

2. 解线性方程组

要掌握用克莱姆法则解简单的线性方程组,以及讨论一些简单的齐次线性方程组解的情况.

总 习 题 1

1. 填空题

(1) 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3x \\ x & x & 2 & 1 \end{vmatrix}$,则在 D 的展开式中,x^4 的系数是________ x^3 的系数是________.

(2) 如果 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k$,则 $\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & b_1+3c_1 & 2c_1+a_1 \\ a_2+2b_2 & b_2+3c_2 & 2c_2+a_2 \\ a_3+2b_3 & b_3+3c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix}=$________.

(3) 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 则第 4 行各元素的余子式之和的值为________

2. 选择题

(1) 如果 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k$,则行列式 $\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{vmatrix}=$( ).

A. k B. k^2 C. k^3 D. k^4

(2) 若行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{vmatrix}$,则 D 等于( ).

A. $-abdg$　　　　B. $abdg$

C. $-abdg-ceh-fi-j$　　　　D. $abdg+ceh+fi+j$

(3) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

A. $a_1b_2c_3d_4-a_4b_3c_2d_1$　　　　B. $a_1b_2c_3d_4+a_4b_3c_2d_1$

C. $(a_1b_2-a_4b_3)(c_3d_4-c_2d_1)$　　　　D. $(b_2c_3-b_3c_2)(a_1d_4-a_4d_1)$

3. 计算下列二阶、三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$；　　　　(2) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　　　　(4) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.

4. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$；　　　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

5. 解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}=0$；　　　　(2) $\begin{vmatrix} x-3 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & -2 \\ 2 & -2 & x-3 \end{vmatrix}=0$；

(3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$.

6. 证明下列恒等式：

(1) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & a+1 & -1 \\ 1 & a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a^4$;

(4) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

(5) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

7. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$.

8. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$.

9. 用克莱姆法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=0, \\ x_2+5x_3+6x_4=0, \\ x_3+5x_4=1. \end{cases}$

10. 判断齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+x_2+9x_3=0 \end{cases}$$

有无非零解.

11. k 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+kx_2-x_3=0, \\ 2x_1+kx_2+kx_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

12. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=tx_1, \\ 5x_1-3x_2+3x_3=tx_2, \\ x_1 \qquad\quad +2x_3=-tx_3 \end{cases}$$

只有零解，求参数 t.

第 2 章　矩　　阵

矩阵是线性代数中的一个重要概念，它贯穿于线性代数的各部分内容. 在数学科学、自然科学、工程技术与生产实践中有许多问题都可以归结为矩阵的运算，进而用矩阵的理论来处理. 本章主要介绍矩阵的基本概念、基本运算和基本性质.

2.1　矩阵的概念

在给出矩阵的定义之前，先看几个简单的关于矩阵的例子.

例 1　设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3, \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7. \end{cases}$$

这个方程组的未知量系数及常数项按方程组中的顺序组成一个 4 行 5 列的矩形阵列如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

这个阵列决定着给定方程组是否有解以及如果有解、解是什么等问题. 因此，对这个阵列的研究很有必要.

例 2　某一地区生产煤，有 s 个产地 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 和 n 个销地 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，那么一个调运方案可用

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的形式表示. 其中 a_{ij} 为由产地 A_i 运到销地 B_j 的数量，这个 s 行 n 列的矩形阵列具体描述了产地和销地之间的供销情况.

例 3　4 个城市间的航线如图 2.1 所示，若令

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{从城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 有一条单向航线},\\0,\text{从城市 } i \text{ 到城市 } j \text{ 没有航线},\end{cases}$$

则图 2.1 可用

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

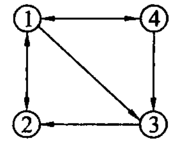


图 2.1

来表示.

从例 1 至例 3 可以看出，这些问题都可以用一个矩形阵列表示，这种矩形阵列称为矩阵. 下面给出矩阵的定义.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的一个 m 行 n 列的矩形表，称为一个 m 行 n 列矩阵，简称 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ **矩阵**，记作

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中，a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素.

一般情况下，用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵. 为了标明矩阵的行数 m 和列数 n，可用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 表示，或记作 $(a_{ij})_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书中的矩阵，除了特别说明外，都指实矩阵.

所有元素均为零的矩阵，称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{0}$.

行数和列数都等于 n 的矩阵，称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**，记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_n$.

注 n 阶矩阵仅仅是由 n^2 个元素排成的一个正方表，而与 n 阶行列式不同. 一个由 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素按原来的排列形式构成的 n 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)$ 称为**行矩阵**，又称**行向量**. 为避免元素间的混淆，行矩阵也可记作 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ 称为**列矩阵**，又称**列向量**.

定义 2 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**；若满足 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$（即同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 所有对应的元素均相等），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如，$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 7\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$，则 A 与 B 为同型矩阵，均为 2×3 的矩阵，又若 $a=-1,b=2,c=3,d=-2,e=4,f=7$，则 $A=B$.

习 题 2.1

1. 有 6 名选手参加乒乓球比赛，成绩如下：选手 1 胜选手 2、4、5，选手 6 负于选手 3；选手 2 胜选手 4、5，选手 6 负于选手 1、3；选手 3 胜选手 1、2，选手 4 负于选手 5、6；选手 4 胜选手 5，选手 6 负于选手 1、2、3；选手 5 胜选手 3，选手 6 负于选手 1、2、4. 若胜一场得 1 分，负一场得零分，试用矩阵表示输赢状况.

2. 某厂生产 5 种产品，1－3 月份的生产数量及产品的单位价格如表 2.1 所示。

表 2.1

产量 \ 产品 / 月份	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
1	50	30	25	10	5
2	30	60	25	20	10
3	50	60	0	25	5
单位价格(万元)	0.95	1.2	2.35	3	5.2

作矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times5}$，使 a_{ij} 表示 i 月份生产 j 种产品的数量；$B=(b_j)_{5\times1}$，使 b_j 表示 j 种产品的单位价格. 试计算该厂各月份的总产值.

2.2 矩阵的运算

2.2.1 矩阵的加法

定义 3 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记作 $C=A+B$.

注 两个矩阵只有是同型矩阵时，才能够相加，加法法则是对应位置的元素相加.

例如：
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix},$$
$$A+B=\begin{pmatrix}1+3 & -2+4 & 0+0\\ 3+2 & 4+(-1) & -5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 5 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

由于数的加法具有交换律和结合律,因此矩阵加法满足下列运算规律.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{0}$ 均为同型矩阵,则

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (交换律);

(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ (结合律);

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

其中,设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,定义 $-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

这样,矩阵的减法定义为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

2.2.2 数与矩阵相乘

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k$ 是一个常数,则矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数乘,记作 $k\boldsymbol{A}$.

注 数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$,就是把 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都乘以数 k.

例如: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,则 $2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

数与矩阵的乘法满足下列运算规律.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,k,l 为两个常数,则

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}, 0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$;

(2) $k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

(3) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(4) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

例 4 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$,

求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -3-8 & 6-6 & 9-4 & 3+2 \\ 0-10 & 9+6 & -6-0 & 3-2 \\ 12-2 & 0-4 & 9+10 & 6-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 0 & 5 & 5 \\ -10 & 15 & -6 & 1 \\ 10 & -4 & 19 & 6 \end{pmatrix}.$$

例 5 已知

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\1&5&7&9\\2&4&6&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7&5&-2&4\\5&1&9&7\\3&2&-1&6\end{pmatrix},$$

且 $A+2X=B$,求 X.

解 $$X=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&6&-4&4\\4&-4&2&-2\\1&-2&-7&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&-2&2\\2&-2&1&-1\\\frac{1}{2}&-1&-\frac{7}{2}&-1\end{pmatrix}.$$

2.2.3 矩阵的乘法

定义 5 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$,$B=(b_{ij})_{s\times n}$,规定 A 与 B 的乘积为矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$,记作 $C=AB$,其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,即 AB 的第 i 行第 j 列的元素为 A 的第 i 行各元素分别与 B 的第 j 列对应元素乘积之和.

关于矩阵乘法的定义,必须注意以下两点.

(1) 因为乘积矩阵 AB 的元素 c_{ij} 规定为左边矩阵 A 的第 i 行元素与右边矩阵 B 的第 j 列对应元素的乘积之和,所以只有当左边矩阵 A 的列数等于右边矩阵 B 的行数时,它们才可以相乘,否则不能相乘.

(2) 乘积矩阵 AB 的行数等于左边矩阵 A 的行数,乘积矩阵的列数等于右边矩阵 B 的列数. 矩阵 $A_{m\times s}$ 与 $B_{s\times n}$ 相乘,可用图 2.2 来表示,当内部的两个数字相同时,AB 就有意义,此时外边的两个数字就分别给出了乘积矩阵 AB 的行数和列数.

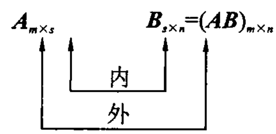


图 2.2

例 6 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&0\\7&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&4\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 因为 A 是一个 4×2 矩阵,B 是一个 2×3 矩阵,所以 A 与 B 可以相乘,且 AB 是 4×3 矩阵. 由定义可得

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&0\\7&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times1+2\times(-1)&1\times2+2\times3&1\times0+2\times4\\3\times1+4\times(-1)&3\times2+4\times3&3\times0+4\times4\\-1\times1+0\times(-1)&-1\times2+0\times3&-1\times0+0\times4\\7\times1+(-1)\times(-1)&7\times2+(-1)\times3&7\times0+(-1)\times4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&8&8\\-1&18&16\\-1&-2&0\\8&11&-4\end{pmatrix}.$$

注 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不能相乘，因为 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数.

例 7 已知 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

解 $$\boldsymbol{AB}=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}b_1a_1&b_1a_2&b_1a_3\\b_2a_1&b_2a_2&b_2a_3\\b_3a_1&b_3a_2&b_3a_3\end{pmatrix}.$$

例 8 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

解 $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}_{2\times2},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

从以上几例可以看出，矩阵的乘法不满足交换律. 就是说：当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘时，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不一定能够相乘，即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也不一定相等. 所以，在矩阵乘法运算中，不可随意颠倒相乘的两个矩阵的次序. 为了区分相乘矩阵的次序，也常把乘积 $\boldsymbol{AB}$ 说成是“用 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$”或“用 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$”. “左乘”与“右乘”一般是不同的，这一点与数的乘法运算不同，读者应特别注意.

矩阵乘法不满足交换律，但并不是说对所有的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都有 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}.$$

故在本例中有 $AB=BA$.

总之，作为一般规律，矩阵乘法的交换律是不成立的. 对于两个 n 阶方阵 A 与 B，如果 $AB=BA$，则称 A 与 B 是**可交换的**. 上面例子中的 A 与 B 就是可交换的.

从例 8 还可以看出，矩阵 $A\neq 0,B\neq 0$，但却有 $AB=0$. 这表明在矩阵乘法中，当 $AB=0$ 时，不一定有 $A=0$ 或 $B=0$ 成立. 因此，若 $A\neq 0$，由 $AX=AY$ 不一定能推出 $X=Y$，这是因为虽然 $AX-AY=A(X-Y)=0$，不一定有 $X-Y=0$. 即矩阵乘法也不满足消去律.

矩阵的乘法满足下列运算规律.

设 $A,B,C,0$ 在下列运算中可进行，则

(1) $0A=0,A0=0$;

(2) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$（关于数乘的结合律）；

(3) $A(BC)=(AB)C$（乘法结合律）；

(4) $A(B+C)=AB+AC$（左分配律）；

(5) $(A+B)C=AC+BC$（右分配律）.

在介绍了矩阵的乘法运算之后，再回头来看线性方程组与矩阵及矩阵乘法的联系.

对线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{2.2}$$

若记

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

利用矩阵乘法，线性方程组(2.2) 可表示成矩阵形式：

$$Ax=b,\tag{2.3}$$

其中，A 称为线性方程组(2.2) 的**系数矩阵**，方程组(2.3) 称为**矩阵方程**. 特别地，齐次线性方程组可以表示成

$$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}.$$

注 对行(列)矩阵,为与后面章节的符号一致,常按行(列)向量的记法,采用小写黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\cdots$ 表示.

将线性方程组写成矩阵的形式,不仅书写方便,而且还可以把线性方程组的理论与矩阵理论联系起来,这给线性方程组的讨论带来很大的便利.

例 9 解矩阵方程

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\0&4\\2&0\end{pmatrix}.$$

解 根据矩阵乘法规则,可判断出矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的行数为 3、列数为 2,因此可设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix},$$

则有
$$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\0&4\\2&0\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix}2x_{11}+4x_{12}&3x_{11}+5x_{12}\\2x_{21}+4x_{22}&3x_{21}+5x_{22}\\2x_{31}+4x_{32}&3x_{31}+5x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\0&4\\2&0\end{pmatrix}.$$

根据矩阵相等解得

$$x_{11}=7,\quad x_{12}=-4,\quad x_{21}=8,\quad x_{22}=-4,\quad x_{31}=-5,\quad x_{32}=3,$$

故
$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}7&-4\\8&-4\\-5&3\end{pmatrix}.$$

2.2.4 矩阵的转置

定义 6 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行依次换成同序数的列得到的新矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$. 本书中采用记号 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置有如下运算规律(假设运算都是可行的):

(1)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$; (2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3)$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$; (4)$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明 (1),(2),(3) 显然成立,现证(4) 成立. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}$,易见$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 均为 $n\times m$ 矩阵. 矩阵$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 第 j 行第 i 列的元素是$(\boldsymbol{AB})$ 第 i 行第 j 列的元素 $\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$,而矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 第 j 行第 i 列的元素应为矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 第 j 行的元素与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 第 i 列对应元素乘积的和,即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列的元素与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行对应元素乘积的和 $\sum_{k=1}^{s} b_{kj}a_{ik} = b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{sj}a_{is}$,所以$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

注 规律(4) 可推广为$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$.

例 10 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法 1 因为

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix},$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

解法 2 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$

2.2.5 方阵的幂

定义 7 设方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$,规定 $\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个}$,$k$ 为自然数,$\boldsymbol{A}^k$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂.

方阵的幂具有以下运算规律:

(1) $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$(m,n为非负整数);

(2) $(A^m)^n = A^{mn}$.

注　一般地,$(AB)^m \neq A^m B^m$,m为自然数.

例 11　设$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,求$A^3$.

解　$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

2.2.6　方阵的行列式

定义 8　由n阶方阵A的各元素所构成的行列式(各元素的位置不变),称为方阵A的行列式,记作$|A|$或$\det A$.

方阵A的行列式$|A|$满足以下运算性质(设A,B为n阶方阵,k为常数):

(1) $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$(行列式的性质 1);

(2) $|kA| = k^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$.

证明　性质(1)、(2)利用行列式的性质即得.下面仅以二阶矩阵为例验证性质(3).

设
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} \\ &= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = |A||B|. \end{aligned}$$

注　对n阶矩阵A,B,虽然在一般情况下$AB \neq BA$,但$|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$.

性质(3)可以推广为:若$A_1, A_2, \cdots, A_n$均为n阶矩阵,则$|A_1 A_2 \cdots A_n| = |A_1||A_2| \cdots |A_n|$.

2.2.7 几种特殊的 n 阶方阵

1. 单位矩阵

定义 9 主对角线上元素全为 1，其余元素全为 0 的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_n$$

称为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{E}_n$，简记为 $\boldsymbol{I}$ 或 E，本书采用记号 $\boldsymbol{I}$.

单位矩阵在矩阵乘法中的作用相当于数 1 在普通数的乘法中的作用，即

$$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n}, \quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}_{m\times n}, \quad \boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A}_{n\times n} = \boldsymbol{A}_{n\times n}.$$

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，规定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$.

2. 数量矩阵

定义 10 主对角线上元素全为常数 k，其余元素全为 0 的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} = k\boldsymbol{I}_n$$

称为 n 阶数量矩阵，记作 $k\boldsymbol{I}_n$，简记为 $k\boldsymbol{I}$.

数量矩阵具有下列性质：

(1) 同阶数量矩阵的和、差、积仍为数量矩阵；

(2) $(k\boldsymbol{I}_m)\boldsymbol{A}_{m\times n} = k\boldsymbol{A}_{m\times n}, \quad \boldsymbol{A}_{m\times n}(k\boldsymbol{I}_n) = k\boldsymbol{A}_{m\times n}, \quad (k\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{A}_{n\times n} = \boldsymbol{A}_{n\times n}(k\boldsymbol{I}_n) = k\boldsymbol{A}_n.$

3. 对角矩阵

定义 11 除主对角线上元素外，其余元素全为 0 的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 n 阶对角矩阵.

同阶对角矩阵的和、差、积仍是对角矩阵，其结果为两对角矩阵相应对角元素的和、差、积. 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & & \\ & a_{22} \pm b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. 上(下)三角形矩阵

定义 12 主对角线以下(上)的元素全为 0 的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 n 阶**上(下)三角形矩阵**.

同阶上(下)三角形矩阵的和、差、积仍为上(下)三角形矩阵.

5. 对称矩阵和反对称矩阵

定义 13 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶**对称矩阵**;满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶**反对称矩阵**.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 为三阶对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为三阶反对称矩阵.

对称矩阵有如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是对称矩阵 $\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同阶对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},k\boldsymbol{A}$ 也是对称矩阵,但 $\boldsymbol{AB}$ 不一定是对称矩阵.

反对称矩阵有如下性质:

(1) $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是反对称矩阵 $\Leftrightarrow a_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 且 $a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同阶反对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},k\boldsymbol{A}$ 也是反对称矩阵,但 $\boldsymbol{AB}$ 不一定是反对称矩阵.

以上性质,利用定义不难证明.读者可自行练习.

例 12 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵.

证明 因 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,由定义知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵.又 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$,由定义知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为反对称矩阵.

由于$A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$，从例 12 的结论可知，任一个 n 阶矩阵A 可写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

习 题 2.2

1. 计算：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，计算：

(1) $3A-B$；　(2) $2A+3B$；　(3) 若 X 满足 $A+X=B$，求 X.

3. 计算：

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$；

(3) $(1,2,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1,2,3)$；

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；　　(6) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

4. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $3AB-2A$ 及 $A^{\mathrm{T}}B$.

5. 解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

6. 举反例说明下列命题是错误的：

(1) 若 $A^2=0$，则 $A=0$；

(2) 若 $A^2=A$,则 $A=0$ 或 $A=I$;

(3) 若 $AX=AY$,且 $A\neq 0$,则 $X=Y$.

7. 计算下列矩阵:

(1) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}^n$($n$ 为正整数);　(2) $\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{bmatrix}^n$($n$ 为正整数);　(3) $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$.

8. 设 A 与 B 是两个 n 阶反对称矩阵,证明:当且仅当 $AB=-BA$ 时,AB 是反对称矩阵.

9. 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ & a_{22} & a_{23}\\ & & a_{33}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ & b_{22} & b_{23}\\ & & b_{33}\end{pmatrix},$$

验证 aA(a 为实数),$A+B$,AB 仍为同阶同结构上三角形矩阵.

10. 设矩阵 A 为三阶矩阵,若已知 $|A|=m$,求 $|-mA|$.

11. 设 A 为 n 阶矩阵,n 为奇数,且 $AA^{\mathrm{T}}=I$, $|A|=1$,求 $|A-I|$.

2.3　逆　矩　阵

从上一节矩阵的运算可以看到,矩阵与数一样有加、减、乘等运算.数还有除法作为乘法的逆运算,那么矩阵乘法有没有逆运算呢?这是本节所要讨论的问题.

2.3.1　逆矩阵的概念和性质

在数的运算中,对于数 $a\neq 0$,总存在唯一的一个数 a^{-1},使得 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$.数的逆在解方程中起着重要作用,例如解一元线性方程组 $ax=b$,当 $a\neq 0$ 时,其解为 $x=a^{-1}b$.

对于一个矩阵 A,是否也存在类似的运算?在回答这个问题之前,先引入可逆矩阵与逆矩阵的概念.

定义 14　设 A 是 n 阶矩阵,如果存在 n 阶矩阵 B,使得

$$AB=BA=I,\tag{2.4}$$

则称 A 是可逆矩阵,B 是 A 的逆矩阵.记作 $A^{-1}=B$.

注　在式(2.4)中,A 与 B 是对称的,故 B 也可逆,且 $B^{-1}=A$,即 A,B 互为逆矩阵.

例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

有 $AB=BA=I$,故 B 是 A 的逆矩阵,即 $B=A^{-1}$.同时,A 也是 B 的逆矩阵,即 $A=B^{-1}$.

又如单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 是可逆的，且 $\boldsymbol{I}^{-1}=\boldsymbol{I}$.

定理 1 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一.

证明 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 均为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{I},$$

亦即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BI}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{IC}=\boldsymbol{C}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

可逆矩阵的基本性质如下.

定理 2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则有下列性质成立.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 也可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=1$.

证明 (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的逆矩阵，即 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) 由于 $(k\boldsymbol{A})\left(\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\left(k\cdot\dfrac{1}{k}\right)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}=\left(\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)(k\boldsymbol{A})$，故 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) 由于 $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AIA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$，同理可证 $(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4) 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，及 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AA}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(5) 由 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$，有 $|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{I}|$，即 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=1$，或 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

注 (1) 性质(3)可以推广为：设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 是 s 个 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\boldsymbol{A}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

(2) 两个可逆矩阵之和不一定是可逆的，即一般地 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

例 13 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

解 利用待定系数法求解. 设 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则由

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix}2a+c&2b+d\\-a&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

得到

$$\begin{cases}2a+c=1,\\2b+d=0,\\-a=0,\\-b=1;\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}a=0,\\b=-1,\\c=1,\\d=2.\end{cases}$$

又因为
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
所以
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 14 如果
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},\text{其中 } a_i \neq 0\ (i=1,2,\cdots,n),$$
试验证
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

证明 因为
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$
所以
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

例 15 已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{I}$，化简 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$.

解 $$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}]^{-1}$$
$$=(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).$$

2.3.2 矩阵可逆的条件

为了讨论 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的条件，先由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 构造出它的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

定义 15 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，令 A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，将这 n^2 个数 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 n 阶矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，即 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}$.

容易验证

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & |\boldsymbol{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix},$$

从而得到

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{2.5}$$

定理 3 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

证明 先证必要性. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$，两边取行列式，由行列式乘法公式有 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{I}|=1$，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

再证充分性. 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，由式(2.5)知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，再根据可逆矩阵的定义知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*. \tag{2.6}$$

注 (1) 如果 n 阶矩阵 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**非奇异矩阵**，否则称 $\boldsymbol{A}$ 为**奇异矩阵**. 由定理 3 知，可逆矩阵是非奇异矩阵.

(2) 式(2.5)反映了 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的基本关系.

(3) 由定理 3 的证明不仅得到了矩阵可逆的充要条件，而且还给出了求逆矩阵的公式(2.6).

(4) 还可以看到，如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆. 又因 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是唯一的，于是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$. 即由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，

必然可得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$,反之也一样,因此有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 今后若用定义证明 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 时,只需验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$ 之一成立即可.

例 16　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix},$$

问 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆?若可逆,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 又因

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&-5\end{vmatrix}=-5,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\-3&-5\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix}=7,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&1\\2&-5\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\-3&-5\end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0\\-3&2\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1,$$

所以

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\5&-1&1\\\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

2.2.3　矩阵方程

对标准矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵,利用矩阵乘法的运算规律和逆矩阵的运算性质,通过在方程两边左乘或右乘相应矩阵的逆矩阵,即可求出其解分别为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1},\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}.$$

而其他形式的矩阵方程,则可以通过矩阵的有关运算性质转化为标准矩阵方程后求解.

例 17 设A,B,C是同阶矩阵，且A可逆，下列结论如果正确，试证明；如果不正确，试举反例说明.

(1) 若 $AB = AC$，则 $B = C$；

(2) 若 $AB = CB$，则 $A = C$.

解 (1) 正确. 由 $AB = AC$ 及A 可逆，在等式两边左乘 A^{-1}，得 $A^{-1}AB = A^{-1}AC$，从而有 $IB = IC$，即 $B = C$.

(2) 不正确. 例如，设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

显然有 $AB = CB$，但 $A \neq C$.

注 从该例可以看出，矩阵乘法的消去律只有在矩阵为逆矩阵时才成立.

例 18 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 X 使满足 $AXB = C$.

解 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

所以 A^{-1}, B^{-1} 都存在，且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

又由 $AXB = C$ 得到 $A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$，即

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}.$$

例 19 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$AP = P\Lambda$，求 A^n.

解　因为 $|P|=2$，所以 P 可逆，且 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}$，$A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1}$，$\cdots$，$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$，而

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\quad \Lambda^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix},\cdots,\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix},$$

故
$$A^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&2^{n+1}\\2&2^{n+2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4-2^{n+1}&2^{n+1}-2\\4-2^{n+2}&2^{n+2}-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{bmatrix}.$$

例 20　设方阵 A 满足方程 $A^2-3A-10I=0$，证明：A，$A-4I$ 均可逆，并求出它们的逆矩阵.

证明　由 $A^2-3A-10I=0$ 得 $A(A-3I)=10I$，即 $A\left[\frac{1}{10}(A-3I)\right]=I$，故 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{10}(A-3I)$.

又由 $A^2-3A-10I=0$ 得 $(A+I)(A-4I)=6I$，即 $\frac{1}{6}(A+I)(A-4I)=I$，故 $A-4I$ 可逆，且 $(A-4I)^{-1}=\frac{1}{6}(A+I)$.

例 21　设三阶矩阵 A，B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$，且

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix},$$

求 B.

解　由 $A^{-1}BA-BA=6A$ 得 $(A^{-1}-I)BA=6A$，即 $(A^{-1}-I)B=6I$，从而

$$B=6(A^{-1}-I)^{-1}=6\left(\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$=6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

习 题 2.3

1. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{bmatrix}$； (3) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$.

2. 用逆矩阵法解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$.

3. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 均可逆.

4. 若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，已知 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}$.

7. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{11}$.

8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，

(1) 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵；

(2) 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

2.4 矩阵的分块

2.4.1 分块矩阵的概念

对于行数和列数较高的矩阵，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成

若干小矩阵的运算，同时也使原矩阵的结构显得简单而清晰. 具体做法是：将大矩阵用若干条纵线和横线分成多个小矩阵. 每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

矩阵的分块有多种方式，可根据需要而定. 例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

可分成 $\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\ \hdashline 0&0&0&1\end{array}\right]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_3&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_1\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{0}=(0,0,0)$.

也可分成 $\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\ \hdashline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&3\\0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

此外，$\boldsymbol{A}$ 还可按如下方式分块：

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:c:c:c}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\alpha}),$$

其中 $$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix};$$

或者 $$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&3\\ \hdashline 0&1&0&-1\\ \hdashline 0&0&1&0\\ \hdashline 0&0&0&1\end{array}\right]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,0,3)$，$\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,0,-1)$，$\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,1,0)$，$\boldsymbol{\beta}_4^{\mathrm{T}}=(0,0,0,1)$.

注 一个矩阵也可看做是以 $m\times n$ 个元素为一阶子块的分块矩阵. 分块矩阵运算时，把子块作为元素处理.

2.4.2 分块矩阵的运算

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算规则相似. 分块时要注意,参与运算的两矩阵按块能运算,并且参与运算的子块也能运算,即内外都能运算.

(1) 加法:设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同、列数相同,采用相同的分块法,若

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行数相同、列数相同,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}+\boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}+\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}.$$

(2) 数乘:设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}(k\text{ 为实数}),\text{则 } k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}.$$

(3) 乘法:设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times t$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $t\times n$ 矩阵,分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{p1},\boldsymbol{A}_{p2},\cdots,\boldsymbol{A}_{pt}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1q},\boldsymbol{B}_{2q},\cdots,\boldsymbol{B}_{tq}$ 的行数,则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{pq}=\sum\limits_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{pk}\boldsymbol{B}_{kq}\quad(p=1,2,\cdots,s;q=1,2,\cdots,r)$.

例 22 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

用分块矩阵法计算 $k\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解 将矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&3\\0&1&2&4\\ \hdashline 0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}I&C\\0&-I\end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&0&0\\2&0&0&0\\ \hdashline 6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}D&0\\F&I\end{pmatrix},$$

则
$$kA=k\begin{pmatrix}I&C\\0&-I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kI&kC\\0&-kI\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0&k&3k\\0&k&2k&4k\\0&0&-k&0\\0&0&0&-k\end{pmatrix},$$

$$A+B=\begin{pmatrix}I&C\\0&-I\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}D&0\\F&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I+D&C\\F&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1&3\\2&1&2&4\\6&3&0&0\\0&-2&0&0\end{pmatrix}.$$

例 23 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

用分块矩阵法计算 AB.

解 把 A,B 分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}I&0\\A_1&I\end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&I\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},$$

则
$$AB=\begin{pmatrix}I&0\\A_1&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&I\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&I\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix},$$

而
$$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\3&1\end{pmatrix},$$

于是

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{pmatrix}.$$

例 24 如果将矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{I}_n$ 分块成

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{m} \end{array}\right)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n),$$

$$\boldsymbol{I}_n=\left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n),$$

则 $\boldsymbol{AI}_n=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{A\varepsilon}_1,\boldsymbol{A\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{A\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$,即有 $\boldsymbol{A\varepsilon}_j=\boldsymbol{A}_j(j=1,2,\cdots,n)$.

注 矩阵按行(列)分块是最常见的一种分块方法.一般地,$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 m 行,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个**行向量**.若第 i 行记作

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})①,$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就可表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 列,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个**列向量**.若第 j 列记作

$$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\text{则 } \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

(4) 转置:设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix},\text{则 } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

关于分块矩阵,下列知识也是经常要用到的.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且在对角线上的子块都是方阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix},$$

① 今后列向量(列矩阵)常用小写黑体字母表示,如 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x}$;而行向量(行矩阵)则用列向量的转置表示,如 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 等.

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，则称 A 为**分块对角矩阵**.

分块对角矩阵具有以下性质：

(1) 若 $|A_i|\neq 0\ (i=1,2,\cdots,s)$，则 $|A|\neq 0$，且 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

(2) 若 $|A|\neq 0$，则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_s^{-1} \end{pmatrix};$$

(3) 同结构的分块对角矩阵的和、差、积、数乘及逆仍是分块对角矩阵，且运算表现为对应子块的运算.

形如

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

的分块矩阵，分别称为**分块上三角矩阵**或**分块下三角矩阵**，其中 $A_{pp}(p=1,2,\cdots,s)$ 是方阵. 同结构的分块上(下)三角矩阵的和、差、积、数乘及逆仍是分块上(下)三角矩阵.

例 25　设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解

$$A=\left(\begin{array}{c:cc} 5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1=(5),\quad A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right),\quad A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\frac{A_2^*}{|A_2|}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 26　分块方阵

$$D=\begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix},$$

其中 A,B 分别为 r 阶与 k 阶可逆方阵，C 是 $r\times k$ 矩阵，$\mathbf{0}$ 是 $k\times r$ 零矩阵. 证明 D 可逆，并求 D^{-1}.

解 设 D 可逆,且 $D^{-1}=\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$,其中 X,Y 分别为与 A,B 同阶的方阵,则

$$D^{-1}D=\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}=I,$$

即
$$\begin{pmatrix} XA & XC+ZB \\ WA & WC+YB \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix},$$

于是得
$$XA=I_r \qquad ①$$
$$WA=0 \qquad ②$$
$$XC+ZB=0 \qquad ③$$
$$WC+YB=I_k \qquad ④$$

因为 A 可逆,用 A^{-1} 右乘式 ① 与式 ② 可得
$$XAA^{-1}=A^{-1},\quad WAA^{-1}=0,$$
即
$$X=A^{-1},\quad W=0.$$
将 $X=A^{-1}$ 代入式 ③,有 $A^{-1}C=-ZB$,因为 B 可逆,则 $A^{-1}CB^{-1}=-ZBB^{-1}$,即 $Z=-A^{-1}CB^{-1}$. 将 $W=0$ 代入式 ④,有 $YB=I_k$,再用 B^{-1} 右乘上式可得
$$Y=I_kB^{-1}=B^{-1}.$$

于是求出
$$D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix},$$

容易验证
$$DD^{-1}=D^{-1}D=I.$$

习 题 2.4

1. 按指定分块的方法,用分块矩阵乘法求下列矩阵的乘积:

(1) $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 \end{array}\right)$;　　(2) $\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ \hdashline 3 & 0 & -2 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$.

2. 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆,求:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}$;　　(2) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}$.

3. 用分块矩阵法求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$(其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$).

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 矩阵,$|\boldsymbol{A}|=-2$,把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$,其中 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,3)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,求:

(1) $|\boldsymbol{A}_1,2\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$;　　(2) $|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|$.

2.5 矩阵的初等变换

2.5.1 矩阵的初等变换

定义 16 矩阵的下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(1) 交换矩阵的两行(交换第 i 行和第 j 行,记作 $r_i\leftrightarrow r_j$);

(2) 以一个非零常数 k 乘矩阵的某一行(第 i 行乘数 k,记作 kr_i 或 $r_i\times k$);

(3) 把矩阵的某一行的 k 倍加到另一行(第 j 行乘数 k 加到第 i 行,记为 r_i+kr_j).

把定义中的"行"换成"列",即得到矩阵的**初等列变换**(相应记号中把 r 换成 c). 初等行变换和初等列变换统称为**初等变换**.

注 初等变换的逆变换仍是初等变换,且变换类型相同.

例如,变换 $r_i\leftrightarrow r_j$ 的逆变换即为其本身;变换 $r_i\times k$ 的逆变换为 $r_i\times\frac{1}{k}$;变换 r_i+kr_j 的逆变换为 $r_i+(-k)r_j$ 或 r_i-kr_j.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则用记号 $\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$ 表示.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

定义 17 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

等价作为同型矩阵之间的一种关系,有以下性质:

(1) 自反性:$\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$;

(2) 对称性:若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$;

(3) 传递性:若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

2.5.2 阶梯形矩阵

如果矩阵某一行的元素不全为零，则称该行为矩阵的**非零行**，否则称为**零行**. 并称非零行中左起第 1 个非零元素为该行的**主元**.

定义 18 如果一个矩阵满足下列两个条件：

(1) 如果存在零行，零行位于矩阵的下方；

(2) 各非零行的主元的列标随着行标的增大而严格增大.

则称它为**行阶梯形矩阵**，简称为**阶梯形矩阵**.

例如，下列矩阵都是阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

下列矩阵都不是阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&2&3&4\end{pmatrix}.$$

如果一个矩阵满足下列两个条件：

(1) 阶梯形矩阵；

(2) 每个主元都是 1，并且在每个主元所在的列中，除主元 1 以外其他的元素全都为零.

则称它为**简化行阶梯形矩阵**(**或行最简形**).

例如，下列矩阵都是简化行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&2&0&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

下列矩阵都不是简化行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&2&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&2&6&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

阶梯形矩阵之所以应用广泛，是因为线性代数中的许多问题都需要通过对矩阵施以初等行变换，把矩阵化为阶梯形矩阵来解决. 这就涉及到是否任何一个矩阵都可经过初等变换化成阶梯形矩阵的问题. 下面的定理回答了这一问题.

定理 4 对任一非零矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，都可经过有限次初等行变换把它化成阶梯形矩阵，并再经过若干次初等行变换，可进一步化为简化行阶梯形矩阵.

证明从略.

例 27 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&2&9&6\\-1&-3&4&-17\\1&4&-7&3\\-1&-4&7&-3\end{pmatrix},$$

对 A 作如下初等行变换：

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&4&-7&3\\-1&-3&4&-17\\3&2&9&6\\-1&-4&7&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-3r_1}}\begin{pmatrix}1&4&-7&3\\0&1&-3&-14\\0&-10&30&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+10r_2}\begin{pmatrix}1&4&-7&3\\0&1&-3&-14\\0&0&0&-143\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B.$$

B 为行阶梯形矩阵，再对 B 作如下初等行变换：

$$B\xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{1}{143}\right)}\begin{pmatrix}1&4&-7&3\\0&1&-3&-14\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+14r_3}\begin{pmatrix}1&4&-7&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-4r_2}\begin{pmatrix}1&0&5&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C.$$

C 为简化行阶梯形矩阵.

2.5.3　矩阵的标准型

定理 5　任一非零的 $m\times n$ 矩阵 A 都与一个形如

$$\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\}r\text{ 行}=\begin{pmatrix}I_r&0_{r\times(n-r)}\\0_{(m-r)\times r}&0_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}$$

的矩阵等价，并称 $\begin{pmatrix}I_r&0_{r\times(n-r)}\\0_{(m-r)\times r}&0_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}$ 为 A 的标准型，即 $A\xrightarrow{\text{初等变换}}$

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}_{r\times(n-r)} \\ \boldsymbol{0}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$ 总能实现.

证明从略.

例 28 对例 27 中的矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

再作初等列变换:

$$\boldsymbol{C}\xrightarrow[c_3+3c_2]{c_3-5c_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{D}.$$

故 $\boldsymbol{D}$ 为例 27 中 $\boldsymbol{A}$ 的标准型.

例 29 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的标准型.

解

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{3}{2}c_1+c_3]{\substack{-\frac{1}{2}c_1+c_2 \\ -c_1+c_3}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 30 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的标准型.

解

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-4r_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{r_1+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{I}_3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的标准型为 $\boldsymbol{I}_3$,进一步考察知 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

定理 6 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换可化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$,即 $\boldsymbol{A}$ 的

标准型为 I_n.

可用定理 5 来证明本定理,证明从略.

2.5.4　初等矩阵

定义 19　对单位矩阵 I 作一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**. 三种初等变换分别对应着三种初等矩阵.

(1)I 的第 i,j 行(列) 互换得到的矩阵:

$$\boldsymbol{I}(i,j)=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\,行 \\ \\ \\ \\ j\,行 \\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}.$$

(2)I 的第 i 行(列) 乘非零数 k 得到的矩阵:

$$\boldsymbol{I}(i(k))=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccc}
1 &&&& \\
& \ddots &&& \\
&& k && \\
&&& \ddots & \\
&&&& 1
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ i\,行 \\ \\ \\ \end{array}\end{array}.$$

(3)I 的第 j 行乘数 k 加到第 i 行上或 I 的第 i 列乘数 k 加到第 j 列上得到的矩阵:

$$\boldsymbol{I}(ij(k))=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 & \cdots & k && \\
&&& \ddots & \vdots && \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ i\,行 \\ \\ j\,行 \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i\,列 & & j\,列 & & \end{array} &
\end{array}.$$

命题　初等矩阵有下列基本性质.

(1) $\boldsymbol{I}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{I}(i,j)$;　$\boldsymbol{I}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{I}(i(k^{-1}))$;　$\boldsymbol{I}(ij(k))^{-1}=\boldsymbol{I}(ij(-k))$.

(2) $|I(i,j)|=-1$; $|I(i(k))|=k$; $|I(ij(k))|=1$.

注 该命题说明初等矩阵都是可逆的,且它们的逆矩阵仍是初等矩阵.

定理7 设A是一个$m\times n$矩阵,对A作一次初等行(列)变换,相当于用同种的$m(n)$阶初等矩阵左(右)乘A.

证明 现证明交换A的第i行与第j行等于用$I_m(i,j)$左乘A.将A与I分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_m\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_i\\\vdots\\\varepsilon_j\\\vdots\\\varepsilon_m\end{pmatrix},\quad \text{则 } I_m(i,j)A=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_j\\\vdots\\\varepsilon_i\\\vdots\\\varepsilon_m\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\varepsilon_1A\\\varepsilon_2A\\\vdots\\\varepsilon_jA\\\vdots\\\varepsilon_iA\\\vdots\\\varepsilon_mA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_m\end{pmatrix},$$

其中$A_k=(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})$,$\varepsilon_k=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)(k=1,2,\cdots,m)$.由此可见,$I_m(i,j)A$恰好等于矩阵$A$的第$i$行与第$j$行互换得到的矩阵.

同理可证其他变换的情况.

例31 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix},$$

而
$$I_3(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad I_3(31(2))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix},$$

则
$$I_3(1,2)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

即用$I_3(1,2)$左乘A,相当于交换矩阵A的第1行与第2行.又因

$$AI_3(31(2))=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&1\\5&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix},$$

即用$I_3(31(2))$右乘A,相当于矩阵A的第3列乘2加到第1列.

2.5.5 求逆矩阵的初等变换法

在2.3节中,给出了矩阵A可逆的充分必要条件的同时,也给出了利用伴随矩阵求逆

矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一种方法，即

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|},$$

这种方法称为**伴随矩阵法**.

对于较高阶的矩阵，用伴随矩阵法求逆矩阵计算量太大，下面介绍一种较为简便的方法 —— **初等变换法**.

先给出以下结论.

定理 8　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证　因为初等矩阵是可逆的，故充分条件是显然的.

再证必要性. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则由定理 6 知，$\boldsymbol{A}$ 可经过有限次初等变换化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{I},$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为若干初等矩阵的乘积.

现转到求逆问题.

注意到若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，根据上述定理 8，存在初等矩阵 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\cdots,\boldsymbol{G}_k$ 使得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_k$，在等式两边右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{A},$$

即

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{A}, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{I}. \tag{2.8}$$

式(2.7)表示对 $\boldsymbol{A}$ 施以若干次初等行变换可化为 $\boldsymbol{I}$；式(2.8)表示对 $\boldsymbol{I}$ 施以相同的若干次初等行变换可化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

因此，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 时，可构造 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$，然后对其施以初等行变换，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，则上述初等行变换同时也将其中的单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})\xrightarrow{\text{初等行变换}}\cdots\rightarrow(\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^{-1})$，这就是求逆矩阵的**初等变换法**.

例 32　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　构造 3×6 的矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

例 33 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$,求$(I-A)^{-1}$.

解

$$I-A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&0&0\\3&-2&6\end{pmatrix},$$

$$(I-A,I)=\begin{pmatrix}0&0&-1&1&0&0\\-2&0&0&0&1&0\\3&-2&6&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-2&0&0&0&1&0\\0&0&-1&1&0&0\\3&-2&6&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\3&-2&6&0&0&1\\0&0&-1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&-2&6&0&\frac{3}{2}&1\\0&0&-1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-3&0&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+3r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&-3&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&0&0\end{pmatrix},$$

所以

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -3 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

容易看出，当采用初等列变换求$\boldsymbol{A}$的逆时，可对矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$施以初等列变换. 当$\boldsymbol{A}$变为$\boldsymbol{I}$时，相应的$\boldsymbol{I}$则变为$\boldsymbol{A}^{-1}$，读者不妨对上例试做一下.

习题 2.5

1. 设$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$.

2. 求下列矩阵的标准形：

(1) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 1\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -4 & 3\\ 0 & 4 & -7 & -1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -4 & 3\\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1\\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0\\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

3. 用初等行变换判定下列矩阵是否可逆，如可逆，求其逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$　$(a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

4. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，$2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{I}$为$n$阶单位矩阵.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，并求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$；

(2) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 6 & -2\end{pmatrix}$，试求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且满足 $2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵.

(1) 证明 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵，并求$(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I})^{-1}$；

(2) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

2.6 矩阵的秩

2.6.1 矩阵的秩

矩阵的秩的概念是讨论向量组的线性相关性、线性方程组解的存在性等问题的重要工具. 从 2.5 节已经知道，矩阵可经过初等行变换化为行阶梯形矩阵，且行阶梯形矩阵所含非零行的行数是唯一确定的，这个数实质上就是矩阵的秩，由于这个数的唯一性还没证明，在本节中，首先利用行列式来定义矩阵的秩，然后给出利用初等变换求矩阵秩的方法.

定义 20 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，在 $\boldsymbol{A}$ 中任取 $k(1\leqslant k\leqslant m)$ 行 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 列，位于这些行和列相交处的 k^2 个元素，按其原来的顺序构成一个 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **k 阶子式**.

注 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

例如，取矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & 8\\ 2 & 12 & 12 & 2\\ 1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

的第 1 行和第 2 行，第 1 列和第 3 列，由这 2 行 2 列相交位置上的元素按原来次序构成一个二阶行列式：

$$\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 12\end{vmatrix}=20.$$

它就是 $\boldsymbol{A}$ 的一个二阶子式.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部三阶子式为

$$\begin{vmatrix}2&-3&2\\2&12&12\\1&3&4\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}2&2&8\\2&12&-2\\1&4&1\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}2&-3&8\\2&12&-2\\1&3&1\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}-3&2&8\\12&12&-2\\3&4&1\end{vmatrix}=0.$$

从定义 20 可知，从 $\boldsymbol{A}$ 中可取一阶、二阶和三阶子式，而三阶子式全为零，二阶子式中有不为零的子式，称为**非零子式**. 显然，$\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数为二阶，对矩阵的这种最高阶非零子式的阶数，通常称为**秩**.

定义 21　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 中不为零的子式最高阶数为 r，即存在 r 阶子式不为零，而任何 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）皆为零，则称 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记为 $r(\boldsymbol{A})$. 并规定零矩阵的秩等于零.

显然，上例中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$.

例 34　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&0&-3&4\\0&0&-1&2&1\\0&0&0&7&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩.

解　因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个零行，故 $\boldsymbol{A}$ 的所有四阶子式全为零，而且 $\boldsymbol{A}$ 有三阶子式

$$\begin{vmatrix}2&0&-3\\0&-1&2\\0&0&7\end{vmatrix}=-14\neq 0,$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$.

矩阵的秩具有下列性质：

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有某个 s 阶子式不为 0，则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant s$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 中所有 t 阶子式全为 0，则 $r(\boldsymbol{A})<t$；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$；

(4) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，当 $k\neq 0$ 时，$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$；

(5) $r(\boldsymbol{A}_{n\times n})=n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 可逆.

当 $r(\boldsymbol{A})=\min\{m,n\}$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵，否则称为降秩矩阵.

从上面例子可知，利用定义计算矩阵的秩，需要由高阶到低阶考虑矩阵的子式，当矩阵的行数和列数较高时，按定义求秩是非常麻烦的.

由于行阶梯形矩阵的秩很容易判断，而任意矩阵都可以经过有限次初等行变换化为阶梯形矩阵，因而可考虑借助初等变换法来求矩阵的秩.

2.6.2　矩阵的秩的求法

定理 9　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

证明从略.

定理 9 也可叙述为:初等变换不改变矩阵的秩.

根据上述定理,可以得到利用初等变换求矩阵的秩的方法:把矩阵用初等行变换化成行阶梯形矩阵,则行阶梯形矩阵中非零行的行数就是该矩阵的秩.

例 35 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&-1\\3&-1&0&4\\1&4&5&1\end{pmatrix}$$

的秩.

解 $A\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-3r_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&-2\\0&-1&0&1\\0&4&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_2]{\substack{r_2\times\frac{1}{2}\\r_3+r_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&5&4\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&5&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $r(A)=3$.

例 36 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$$

的秩,其中 k 为参数.

解 $A\xrightarrow[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}}\begin{pmatrix}k+3&1&1&1\\k+3&k&1&1\\k+3&1&k&1\\k+3&1&1&k\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}k+3&1&1&1\\0&k-1&0&0\\0&0&k-1&0\\0&0&0&k-1\end{pmatrix}.$

当 $k=1$ 时,

$$A\to\begin{pmatrix}4&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad r(A)=1.$$

当 $k=-3$ 时,

$$A \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r(A) = 3.$$

当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -3$ 时，$r(A) = 4$.

定理 10　设 A 是 $m \times n$ 矩阵，P 是 m 阶可逆矩阵，Q 是 n 阶可逆矩阵，则

$$r(PA) = r(A);\quad r(AQ) = r(A);\quad r(PAQ) = r(A).$$

证明　因为 P 可逆，故可表示成若干初等矩阵之积，$P = P_1P_2\cdots P_s$，其中 $P_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 皆为初等矩阵. $PA = P_1P_2\cdots P_sA$，即 PA 是 A 经 s 次初等行变换得出的，所以 $r(PA) = r(A)$.

同理可证其他两式.

例 37　设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

求 $r(AB - B)$.

解　$AB - B = (A - I)B$，而 $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$，

即 B 可逆. 又因为

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故
$$r((A - I)B) = r(A - I) = 2.$$

下面再介绍几个常用的矩阵秩的性质.

(1) $\max\{r(A), r(B)\} \leqslant r(A, B) \leqslant r(A) + r(B)$；

(2) $r(A + B) \leqslant r(A) + r(B)$；

(3) $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$；

(4) $r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$；

(5) 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = 0$，则 $r(A) + r(B) \leqslant n$.

其中，某些性质将会在第 3 章加以证明.

例 38　设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$，求证 $r(A) + r(A - I) = n$.

证明　因为 $A^2 = A$，所以 $A^2 - A = 0$，即 $A(A - I) = 0$. 由矩阵秩的性质知 $r(A) +$

$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \leqslant n$，又 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geqslant r(\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})) = r(\boldsymbol{I}) = n$，
所以
$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = n.$$

例 39 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 与其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的关系为
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}, \qquad ①$$

对式 ① 两边取行列式有
$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^n, \qquad ②$$

(1) 当 $r(\boldsymbol{A}) = n$，即 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，式 ② 两边除以 $|\boldsymbol{A}|$ 得 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1} \neq 0$，故 $r(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 当 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$，即 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时，则式 ① 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{0}$，故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n$，即
$$r(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n-(n-1) = 1, \quad r(\boldsymbol{A}^*) = 0 \text{ 或 } 1.$$

又由于 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$，根据矩阵秩的定义知，$\boldsymbol{A}$ 中存在 $n-1$ 阶子式不为 0. 而 $\boldsymbol{A}^*$ 的每个元素 A_{ij} 均为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶子式，即 $\boldsymbol{A}^*$ 中有元素 $A_{ij} \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{0}$，即 $r(\boldsymbol{A}^*) \neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*) = 1$.

(3) 当 $r(\boldsymbol{A}) < n-1$ 时，则 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $n-1$ 阶子式均为 0，即 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素均为 0. 于是 $\boldsymbol{A}^*$ 为零矩阵，所以 $r(\boldsymbol{A}^*) = 0$.

习 题 2.6

1. 设矩阵
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$
试计算 $\boldsymbol{A}$ 的全部三阶子式，并求 $r(\boldsymbol{A})$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 $m \times 1$ 矩阵，试说明 $r(\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的大小关系.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = 1$，证明：

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$；

(2) $\boldsymbol{A}^2 = k\boldsymbol{A}$（$k$ 为常数）.

4. 求下列矩阵的秩,并求一个最高阶非零子式:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 λ 为参数,求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

6. 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda & -16 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & \mu & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

其中 λ,μ 为参数. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的最大值和最小值.

7. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}_n$,求证:$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) + r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) = n$.

8. $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$m > n$,证明:$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = 0$.

小　结

本章主要讨论矩阵的概念及运算、矩阵的分块、求矩阵的逆及矩阵的秩.

1. 矩阵的运算

加法、数乘、乘法、转置、方阵的幂、方阵的行列式.

(1) 矩阵的运算中重点和难点是矩阵的乘法运算. 积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义的前提是:必须满足 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等. 若 $\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}.$$

(2) 一般情况下,矩阵的乘法不满足交换律、消去律,这要与数的乘法区别开来. 矩阵乘法还有一条不同于数的乘法的性质是:$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ 可能成立.

(3) 在矩阵的运算中,只有方阵才能求幂运算和取行列式. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵时,$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

2. 可逆矩阵

(1) 要讨论一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆的前提是:$\boldsymbol{A}$ 是方阵,n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件

是 $|A| \neq 0$.

(2) 掌握一个重要关系式: $AA^* = A^*A = |A|I$.

(3) 会使用两种方法求可逆矩阵 A 的逆矩阵.

① $A^{-1} = A^*/|A|$;其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

② $(A,I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I,A^{-1})$ 或 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$.

3. 矩阵的秩

(1) 掌握用初等行变换的方法求矩阵的秩:利用初等行变换把矩阵化为行阶梯形矩阵,行阶梯形矩阵中非零行的行数就是所要求的矩阵的秩.

(2) 矩阵的秩的下面一些重要结论是经常要用到的:

① $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

② 若 A 为 $m \times n$ 矩阵,则 $0 \leqslant r(A) \leqslant \min\{m,n\}$;

③ $r(A) = r(A^T)$,当 $k \neq 0$ 时,$r(kA) = r(A)$;

④ $r(A_{n\times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆;

⑤ $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$;

⑥ $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$;

⑦ $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$;

⑧ 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = 0$,则 $r(A) + r(B) \leqslant n$.

总 习 题 2

1. 填空题

(1) 设 α 是三维列向量. 若

$$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\alpha^T\alpha =$ ________.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k =$ ________(k 为一正整数).

(3) 使矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩为最小的 λ 的值是________.

2. 选择题

(1) $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则(　　).

A. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=2|\boldsymbol{A}|$　　B. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=n|\boldsymbol{A}|$

C. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=2^n|\boldsymbol{A}|$　　D. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$

(2) 设 $n(n\geqslant 2)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则(　　).

A. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　　B. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

C. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　　D. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

(3) $\boldsymbol{A}_{3\times 2}$ 的第 3 行乘以 5 加到第 1 行，相当于用一初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$，这个初等矩阵是(　　).

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&5&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix},$$

计算 $2\boldsymbol{A},3\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

4. 计算下列矩阵的积：

(1) $(0,1,0)\begin{pmatrix}3&4&0\\2&5&3\\1&6&0\end{pmatrix}$；　　(2) $(0,0,1)\begin{pmatrix}3&4&0\\2&5&3\\1&6&0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}3&4&0\\2&5&3\\1&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}3&4&0\\2&5&3\\1&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

5. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&-2\\-1&0&4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$.

6. 计算 $\begin{pmatrix}a&&\\&b&\\&&-c\end{pmatrix}^n$ (n 为正整数).

7. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，下列命题成立吗？为什么？

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^3=\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}^3$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$；

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$；

(4) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$；

(5) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

(6) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$；

(7) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；

(8) $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=-2$，求 $|5\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|$，$|2\boldsymbol{A}^*|$，$|(2\boldsymbol{A})^{-1}|$，$\begin{vmatrix}-2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}\boldsymbol{0} & -2\boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}$.

9. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$.

10. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}8 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

11. 已知 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

12. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix},$$

且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

13. 已知 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$($k$ 为正整数),求证:$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^{k-2}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$.

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,已知 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}$,求证:$\boldsymbol{A}$ 可逆.

15. 证明:可逆的对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵.

16. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$,证明:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$ 都可逆,并求它们的逆矩阵.

17. 用初等变换法求下列矩阵的逆:

(1) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&a&a^2&a^3\\0&1&a&a^2\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&2&0\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0&0\\0&0&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

第 3 章　线性方程组

在第 1 章中，已经研究过线性方程组的一种特殊情形，即线性方程组中所含方程的个数等于未知量的个数，且方程组的系数行列式不等于零的情形. 求解线性方程组的问题在科学技术与经济管理领域有着相当广泛的应用，因而有必要更普遍更深入地讨论线性方程组的一般理论. 本章主要讨论一般线性方程组的解法、向量组的线性相关性、线性方程组解的存在性和线性方程组解的结构等内容.

3.1　消　元　法

消元法的基本思路是通过消元变形把方程组化成容易求解的同解方程组. 在解未知变量较多的线性方程组时，力求使消元步骤规范而又简便. 下面通过例子来说明消元法的具体做法.

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2. \end{cases} \tag{3.1}$$

解　将第 1 个方程乘 $\frac{1}{2}$ 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1, & ① \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2, & ② \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3, & ③ \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 20x_4 = -2. & ④ \end{cases}$$

将方程 ① 乘 $-2, -3, -5$，并分别加到方程 ②，③，④ 上，消去方程 ②，③，④ 中的 x_1，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = -1, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

再将方程 ② 乘 -2，并分别加到方程 ③，④ 上，消去方程 ③，④ 中的 x_2，得

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + 3x_4 = -1,\\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0,\\ -x_4 = 0,\\ -3x_3 + 9x_4 = 3.\end{cases}$$

再将方程 ③ 乘 -1，方程 ④ 乘$\left(-\dfrac{1}{3}\right)$，并把方程 ③，④ 交换位置，得

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + 3x_4 = -1,\\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0,\\ x_3 - 3x_4 = -1,\\ x_4 = 0.\end{cases} \tag{3.2}$$

容易证明，线性方程组(3.2) 与原线性方程组(3.1) 是同解的. 由方程(3.2) 知 $x_4 = 0$，将其回代方程 ③ 得 $x_3 = -1$，再回代前两个方程，分别得 $x_2 = 2, x_1 = 1$. 所以$(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 是原线性方程组(3.1) 的解.

形如式(3.2) 的方程组称为**行阶梯形方程组**.

从上述解题过程可以看出，用消元法求解线性方程组的具体做法就是对方程组反复实施以下三种变换：

(1) 交换某两个方程的位置；

(2) 用一个非零数乘某一个方程的两边；

(3) 将一个方程的倍数加到另一个方程上去.

以上这三种变换称为**线性方程组的初等变换**. 而消元法的目的就是利用方程组的初等变换将原方程组化为同解的阶梯形方程组. 解这个阶梯形方程组得到原方程组的解. 如果用矩阵表示其系数及常数项，则将原方程组化为行阶梯形方程组的过程就是将其对应矩阵化为行阶梯形矩阵的过程. 这个结论对一般线性方程组也是成立的. 下面就一般线性方程组求解的问题进行讨论.

设有线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\ \qquad\qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.\end{cases} \tag{3.3}$$

注 这是一个有 m 个方程，n 个未知量的线性方程组，其中 m 不一定等于 n. 即方程的个数不一定等于未知量的个数.

将式(3.3) 写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

A 为线性方程组(3.3)的系数矩阵,称 $\overline{A}=(A\,\vdots\,b)$ 为线性方程组(3.3)的增广矩阵.

用消元法解线性方程组的一般步骤如下:

首先写出线性方程组(3.3)的增广矩阵$(A\,\vdots\,b)$.

第一步,设 $a_{11}\neq 0$,否则,将$(A\,\vdots\,b)$的第1行与另一行交换,使第1行第1列的元素不为0.

第二步,第1行乘 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 再加到第 $i(i=2,3,\cdots,m)$ 行上,使$(A\,\vdots\,b)$成为

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\0&a_{22}^{(1)}&\cdots&a_{2n}^{(1)}&b_2^{(1)}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&a_{m2}^{(1)}&\cdots&a_{mn}^{(1)}&b_m^{(1)}\end{pmatrix},$$

对这个矩阵的第2行到第 m 行,第2列到第 n 列再按以上步骤进行,如果有必要,可重新安排方程中未知量的次序,最后总可以得到如下阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}a'_{11}&a'_{12}&\cdots&a'_{1r}&a'_{1r+1}&\cdots&a'_{1n}&d_1\\0&a'_{22}&\cdots&a'_{2r}&a'_{2r+1}&\cdots&a'_{2n}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a'_{rr}&a'_{rr+1}&\cdots&a'_{rn}&d_r\\0&0&\cdots&0&\cdots&&0&d_{r+1}\\0&0&\cdots&0&\cdots&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix},\tag{3.4}$$

其中 $a'_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$.

式(3.4)相应的阶梯形方程组为

$$\begin{cases}a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1r}x_r+a'_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+a'_{1n}x_n=d_1,\\ \qquad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2r}x_r+a'_{2r+1}x_{r+1}+\cdots+a'_{2n}x_n=d_2,\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r+a'_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+a'_{rn}x_n=d_r,\\ \qquad\qquad 0=d_{r+1},\\ \qquad\qquad 0=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ \qquad\qquad 0=0.\end{cases}\tag{3.5}$$

其中 $a'_{ii} \neq 0(i = 1,2,\cdots,r)$.

从上面讨论易知，方程组(3.5) 与原方程组(3.3) 是同解的方程组.

由方程组(3.5) 可知，化为"$0 = 0$"形式的方程是多余的方程，去掉它们不影响方程组的解. 因此，只需要讨论阶梯形方程组(3.5) 的解的各种情况，便可知道原方程组(3.3) 的解的情形.

(1) 如果方程组(3.5) 中 $d_{r+1} \neq 0$，则满足前 r 个方程的任何一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 都不能满足"$0 = d_{r+1}$"这个方程，所以方程组(3.5) 无解，从而方程组(3.3) 也无解.

(2) 如果方程组(3.5) 中 $d_{r+1} = 0$，又有以下两种情况.

① 当 $r = n$ 时，方程组(3.5) 可以写成

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = d_n. \end{cases} \tag{3.6}$$

因 $a'_{ii} \neq 0(i = 1,2,\cdots,n)$，所以它有唯一解(克莱姆定理). 从方程组(3.6) 中最后一个方程解出 x_n，再代入第 $n-1$ 个方程，求出 x_{n-1}. 如此继续下去，则可求出其他未知量，得出它的唯一解，从而得出方程组(3.3) 的唯一解.

② 当 $r < n$ 时，方程组(3.5) 可以写成

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1r}x_r = d_1 - a'_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{1n}x_n, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2r}x_r = d_2 - a'_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{rr}x_r = d_r - a'_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3.7}$$

同样对它进行回代过程，则可求出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，它们是含有 $n-r$ 个未知量 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 的表达式：

$$\begin{cases} x_1 = k_1 - k_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - k_{1n}x_n, \\ x_2 = k_2 - k_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - k_{2n}x_n, \\ \quad\vdots \\ x_r = k_r - k_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - k_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3.8}$$

这样一组表达式称为原方程组(3.3) 的**一般解**. 而 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 称为**自由未知量**(即 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 可以任意取值). 任意给出 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 的一组值，就唯一地定出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值，也就得到方程组(3.7)(亦即原方程组(3.3)) 的一个解. 可见此时方程组有无穷多解. 如果取 $x_{r+1} = c_1,x_{r+2} = c_2,\cdots,x_n = c_{n-r}$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数，则这无穷多解可以表示为

$$\begin{cases} x_1 = k_1 - k_{1r+1}c_1 - \cdots - k_{1n}c_{n-r}, \\ x_2 = k_2 - k_{2r+1}c_1 - \cdots - k_{2n}c_{n-r}, \\ \quad\vdots \\ x_r = k_r - k_{rr+1}c_1 - \cdots - k_{rn}c_{n-r}, \\ x_{r+1} = c_1, \\ x_{r+2} = c_2, \\ \quad\vdots \\ x_n = c_{n-r}. \end{cases} \tag{3.9}$$

综上所述，解线性方程组的步骤是：用初等行变换化方程组(3.3)的增广矩阵为阶梯形矩阵，根据 $d_{r+1}=0$ 或 $d_{r+1}\neq 0$ 来判断原方程组是否有解. 如果 $d_{r+1}\neq 0$，则有 $r(\boldsymbol{A})=r$，而 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=r+1$，即 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$，此时方程组(3.3)无解；如果 $d_{r+1}=0$，则有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=r$，此时方程组(3.3)有解. 而当 $r=n$ 时，有唯一解；当 $r<n$ 时，有无穷多个解. 然后回代求解. 由以上讨论可得出以下定理.

定理 1　线性方程组(3.3)有解的充分必要条件是：$r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$. 当 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n$ 时，有唯一解；当 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})<n$ 时，有无穷多解.

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2-8x_3=17, \\ 2x_1-5x_2+3x_3=3, \\ x_1+7x_2-5x_3=2. \end{cases}$$

解　对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ 作初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -8 & \vdots & 17 \\ 2 & -5 & 3 & \vdots & 3 \\ 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 2 & -5 & 3 & \vdots & 3 \\ -3 & 2 & -8 & \vdots & 17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 0 & -19 & 13 & \vdots & -1 \\ 0 & 23 & -23 & \vdots & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\times\frac{1}{23}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 0 & -19 & 13 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -19 & 13 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+19r_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 18 \end{pmatrix}.$$

因为 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=3=n$，故方程组有唯一解.

与原方程组同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1+7x_2-5x_3=2, \\ x_2-x_3=1, \\ -6x_3=18. \end{cases}$$

由 $-6x_3=18$ 得 $x_3=-3$，回代求解可得 $x_2=-2, x_1=1$.
所以，原方程组的唯一解为

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-2,\\x_3=-3.\end{cases}$$

例 3　解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2-5x_3=-1,\\2x_1+6x_2-3x_3=5,\\3x_1+9x_2-10x_3=2.\end{cases}$$

解　对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ 作初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&-5&-1\\2&6&-3&5\\3&9&-10&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&-5&-1\\0&0&7&7\\0&0&5&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&-5&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

因为 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=2<3$，故方程组有无穷多解. 同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases}x_1+3x_2-5x_3=-1,\\\qquad\qquad\quad x_3=1.\end{cases}$$

取 x_2 为自由未知量，令 $x_2=t$（t 为任意常数），则方程组的全部解为

$$\begin{cases}x_1=4-3t,\\x_2=t,\\x_3=1.\end{cases}$$

例 4　解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\\quad x_2+x_3-4x_4=1,\\x_1+2x_2+3x_3-x_4=4,\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6.\end{cases}$$

解

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\1&2&3&-1&4\\2&3&-1&-1&-6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\0&1&1&-4&3\\0&1&-5&-7&-8\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\0&0&0&0&2\\0&0&-6&-3&-9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\0&0&2&1&3\\0&0&0&0&2\end{array}\right),$$

因为 $r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = 4$，$r(\boldsymbol{A}) = 3$，$r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \neq r(\boldsymbol{A})$，所以原方程组无解.

例 5 对于线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - px_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = q, \end{cases}$$

当 p,q 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解的情况下，求出全部解.

解 $$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -p & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & q \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -p-6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & q-1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -p+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & q+5 \end{array}\right).$$

(1) 当 $p \neq 2$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 4$，方程组有唯一解.

(2) 当 $p = 2$ 时，有

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & q+5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-1 \end{array}\right).$$

当 $q \neq 1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 3 < r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 4$，方程组无解.

当 $q = 1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3 < 4$，方程组有无穷多解. 此时，同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量，令 $x_3 = t$（t 为任意常数），则原方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3 - 2t, \\ x_3 = t, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

下面讨论齐次线性方程组解的情况.

当线性方程组(3.3)中常数项均为零时，这样的线性方程组称为**齐次线性方程组**，其

一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{3.10}$$

将方程组(3.10)写成矩阵形式便是

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},$$

其中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$为系数矩阵，$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$为常数项.

方程组(3.10)恒有解，因为它至少有零解. 即 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，这一结论也可由定理1推出(即 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{0})=r(\boldsymbol{A})$). 又由定理1可知，当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，方程组(3.10)只有零解；当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，方程组(3.10)有无穷多解，即除零解外还有非零解. 于是有以下定理.

定理2　齐次线性方程组(3.10)有非零解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n$.

推论　当 $m<n$ 时，齐次线性方程组(3.10)有非零解.

证明　因为 $r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}=m<n$，由定理2知，齐次线性方程组(3.10)有非零解.

当齐次线性方程组(3.10)的系数矩阵与非齐次方程组(3.3)的系数矩阵相同时，称齐次线性方程组(3.10)是与非齐次方程组(3.3)相对应的齐次方程组(或方程组(3.10)是方程组(3.3)的导出组).

由于齐次线性方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的最后一列全为0，而对 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 作任何初等行变换后，其最后一列总为0，因此，解齐次线性方程组时只需对其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换.

例6　解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0. \end{cases}$$

解　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

因 $r(\boldsymbol{A})=2<4$，所以方程组有非零解. 同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0, \\ \quad 2x_2-7x_3+4x_4=0. \end{cases}$$

取 x_3, x_4 为自由未知量,令 $x_3 = t_1, x_4 = t_2$(t_1, t_2 为任意常数),则原方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}t_1 - t_2, \\ x_2 = \dfrac{7}{2}t_1 - 2t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2. \end{cases}$$

习 题 3.1

1. 选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})$(　　).

A. 小于 m　　B. 小于 n　　C. 等于 m　　D. 等于 n

(2) 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$,如果 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$(　　).

A. 必有无穷多组解　　B. 必有唯一解

C. 必定无解　　D. 选项 A,B,C 均不对

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$,如果 $m < n$,则(　　).

A. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 必有无穷多组解　　B. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 必有唯一解

C. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 必有非零解　　D. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 必有唯一解

2. 用消元法解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3. 用消元法解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2; \end{cases}$

$$(3)\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3+x_4=3,\\3x_1+4x_2+2x_3+3x_4=-2,\\x_1+2x_2+8x_3-x_4=8,\\7x_1+9x_2+x_3+8x_4=0.\end{cases}$$

4. 确定 a,b 的值使下列齐次线性方程组有非零解,并在有非零解时求其全部解.

$$(1)\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=0,\\x_1+ax_2+x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0;\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=0,\\x_1+bx_2+x_3=0,\\x_1+2bx_2+x_3=0.\end{cases}$$

5. λ 取何值时,下列非齐次线性方程组无解?有唯一解?有无穷多解?并在有无穷多解时求出其解.

$$(1)\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2;\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=\lambda-1.\end{cases}$$

3.2　向量组的线性组合

消元法解决了一般线性方程组何时无解、何时有解和如何求解的问题. 为了更进一步讨论线性方程组解的结构,需要引入 n 维向量、向量组的线性相关性及向量组的秩等概念.

3.2.1　n 维向量及其线性运算

定义 1　n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 或 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 称为 n 维向量,这 n 个数称为该向量的 n 个分量,a_i 称为**第 i 个分量**.

分量全为实数的向量称为**实向量**,分量全为复数的向量称为**复向量**. 除非特别声明,本书一般只讨论实向量.

n 维向量可写成一行,也可写成一列,按第 2 章的规定,分别称为**行向量**和**列向量**,即

$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 为 n 维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 维行向量. 行向量和列向量也就是行矩阵和列矩阵,并规定行向量和列向量都可以按矩阵的运算法则进行运算.

本书中,常用黑体小写字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 等表示列向量,用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 等表示行向量,所讨论的向量在没有特别指明的情况下一般都视为列向量.

若干个同维数的列向量(或行向量) 所组成的集合称为**向量组**.

例如，一个 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

的每一列 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}(j=1,2,\cdots,n)$ 组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列向量组**；而由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行 $\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$ 组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**.

根据以上讨论，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可记为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\quad 或\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}.$$

定义 2　设有两个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow a_i=b_i\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow a_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\xlongequal{\text{定义}}(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}};$$

$$k\boldsymbol{\alpha}\xlongequal{\text{定义}}(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}};$$

$$-\boldsymbol{\alpha}\xlongequal{\text{定义}}(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^{\mathrm{T}}.$$

由向量加法及负向量定义，可定义向量减法：

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)^{\mathrm{T}}.$$

向量的加法及数乘统称为向量的**线性运算**.

容易验证向量的线性运算满足下列八条运算规律（$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为 n 维向量，k,l 为常数）.

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$；

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=l(k\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

例 7 设向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 满足关系式 $5\boldsymbol{\gamma}-2\boldsymbol{\alpha} = 3(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$，其中 $\boldsymbol{\alpha} = (2,-1,3,-8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta} = (-1,0,2,4)^{\mathrm{T}}$，求向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

解 由题设知 $2\boldsymbol{\gamma} = 2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \frac{1}{2}(2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}[(4,-2,6,-16)^{\mathrm{T}}+(-3,0,6,12)^{\mathrm{T}}]\\ &= \frac{1}{2}(1,-2,12,-4)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{2},-1,6,-2\right)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

3.2.2 向量组的线性组合

考察线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = b_2,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n = b_m.\end{cases} \tag{3.11}$$

令 $$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}\ (j=1,2,\cdots,n),\quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$

则线性方程组(3.11)可表示为如下向量形式：

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n = \boldsymbol{\beta}. \tag{3.12}$$

于是线性方程组(3.11)是否有解，就相当于是否存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得下列线性关系式成立：

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

在探讨这一问题之前，下面先介绍几个有关向量组的概念.

定义 3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 s 个 n 维向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是 s 个常数，则称向量 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**，称 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为该**线性组合的系数**.

定义 4 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合，也称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**(或线性表示).

容易明白，向量组的线性组合、线性表出这些概念可用前面所讨论的线性方程组的结论来表述. 例如：

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表出的充分必要条件是线性方程组 $\boldsymbol{\alpha}_1x_1+$

$\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_sx_s=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解；

(2)$\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出且表出不唯一的充分必要条件是线性方程组 $\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_sx_s=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多个解；

(3)$\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出的充分必要条件是线性方程组 $\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_sk_s=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

另外，零向量是任何同维向量组的线性组合(这时组合系数可全取为 0)，它对应着齐次线性方程组总有零解.

定理 3 设向量

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}(j=1,2,\cdots,s),$$

则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 与矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\mid\boldsymbol{\beta})$ 的秩相等.

证明 按照定理 1，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$ 有解的充分必要条件是：其系数矩阵与对应的增广矩阵的秩相等. 即 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出的充分必要条件是：以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为列向量的矩阵与以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 为列向量的矩阵有相同的秩.

例 8 任何一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

例 9 零向量是任何一向量组的线性组合.

解 因为 $\mathbf{0}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_s$.

例 10 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何一向量 $\boldsymbol{\alpha}_j(1\leqslant j\leqslant s)$ 都是此向量组的线性组合.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_j=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_j+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_s\quad(1\leqslant j\leqslant s)$.

例 11 判断向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(4,3,-1,11)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2=(4,3,0,11)^{\mathrm{T}}$ 是否都为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合. 若是，写出其表达式.

解 对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)$ 施以初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&-1\\5&1&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-5&-5\\0&3&3\\0&-9&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

易见，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$，故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，且由上面最后一个矩阵知 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

类似地，对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$ 施以初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

易见，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2) = 3$，而 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) = 2$，因此 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

注　由本例可知，矩阵经初等行变换之后，其线性表示关系不变. 该结论的证明见 3.4 节中的定理 12.

习　题　3.2

1. 设 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$.

2. 将下列各题中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示为其他向量的线性组合.

(1)$\boldsymbol{\beta}=(3,5,-6)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-1)$；

(2)$\boldsymbol{\beta}=(2,-1,5,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)$.

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性表示式为 $\boldsymbol{\gamma}_1=3\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+4\boldsymbol{\beta}_3$，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性表示式为 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 求向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性表示式.

4. 试问下列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由其余向量线性表出？若能，写出其线性表示式.

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,4)^{\mathrm{T}}$；

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(2,-8,0)$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(1,2,-1)$.

5. 设有向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix},$$

试问当 a,b 为何值时，

(1)$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？

(2)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？并写出该表达式.

6. 设有向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，且有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$. 求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4$.

3.3 向量组的线性相关性

定义 5 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是$s$个$n$维向量,若存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}, \tag{3.13}$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关.若式(3.13)当且仅当$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时成立,则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

注 (1) 一个向量组要么线性相关要么线性无关.

(2) 包含零向量的任何向量组都是线性相关的.

例如,设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,显然有

$$0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+1\cdot\mathbf{0}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

由定义知该向量组线性相关.

(3) 含有两个相同向量的向量组必然线性相关.

例如,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,其中$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$,则$1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-1)\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$,由定义知该向量组线性相关.

(4) 向量组只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}$时,当$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$时,线性相关;当$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$时,线性无关.

例 12 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$,判断$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是否线性相关.

解 由于$0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,即$0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

例 13 线性相关的向量组增加向量的个数仍然线性相关,相应的线性无关的向量组减少向量的个数仍然线性无关.

证明 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关,即存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$成立,现增加一个向量$\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$,则有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{s+1}=\mathbf{0}$,而系数$k_1,k_2,\cdots,k_s,0$仍然不全为0,故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$仍然线性相关.

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{t-1},\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关,假设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{t-1}$线性相关,则由以上结论知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{t-1},\boldsymbol{\alpha}_t$线性相关,与已知矛盾,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{t-1}$仍线性无关.

注 (1) 线性相关的向量组减少向量的个数之后可能线性相关,也可能线性无关.

例如,
$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},$$

易知 $0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+2\cdot\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=0$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2) 线性无关的向量组增加向量个数之后可能线性相关,也可能线性无关.

例如,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,易知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,现增加 $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,由定义知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 仍线性无关;若增加 $\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$,则 $0\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_4=0$,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

除了定义之外,如何判断向量组的线性相关性呢?

设有列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及由该向量组成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,也就是说,齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$(即 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$)有非零解,由定理 2 即得如下结论.

定理 4 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充分必要条件是:矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 的秩小于向量的个数 s.

证明 由齐次线性方程组 $\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_sx_s=\mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件是:其系数矩阵的秩小于未知量的个数,定理得证.

推论 1 s 个 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关(线性相关) 的充分必要条件是:矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 的秩等于(小于) 向量个数 s.

推论 2 n 个 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关(线性相关) 的充分必要条件是:矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的行列式不等于(等于) 零.

推论 3 当向量组中所含向量的个数大于向量的维数时,此向量组必然线性相关.

例 14 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a,1)^{\mathrm{T}}$,问 a 为何值时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?

解 对 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 施以初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a\\3&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&a-2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&a-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

当 $a=1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=2<3$,由定理 4 知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 15 证明 n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\cdots$,$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

证明 因为

$$|(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)|=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

由推论 2 知，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

例 16 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21},a_{31})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{12},a_{22},a_{32})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{13},a_{23},a_{33})^{\mathrm{T}}$ 线性无关，求证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},a_{21},a_{31},b_1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(a_{12},a_{22},a_{32},b_2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(a_{13},a_{23},a_{33},b_3)^{\mathrm{T}}$ 也线性无关.

证明 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关等价于齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0\end{cases}\tag{3.14}$$

只有零解.

欲证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，只需证线性方程组 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=0$，即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0,\\b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\end{cases}\tag{3.15}$$

只有零解. 这是显然的，因为若方程组(3.15) 有非零解，则其前三个方程必有非零解，这与方程组(3.14) 只有零解矛盾. 因此，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

注 这个结论推广到一般情况得到如下结论：线性无关的向量组增加各向量的维数(注意增加各向量的同维分量) 后的向量组仍然线性无关. 而线性相关的向量组减少各向量的维数(注意减少各向量的同维分量) 后的向量组仍然线性相关. 简言之，增加维数不改变无关性，而减少维数不改变相关性(逆否命题). 后一结论也可从前面所说的方程组(3.15) 有非零解时，方程组(3.14) 也必有非零解得出.

定理 5 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是向量组中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表出.

证明 先证必要性. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在 s 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立. 不妨设 $k_1\neq 0$，于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_s}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_s,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由其余向量线性表出.

再证充分性. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量能由其余向量线性表出，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1=k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，即 $(-1)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

注 线性相关的向量组中至少有一个向量能被其余向量线性表出，但并不是每一个向量都能被其余向量线性表出.

例如，设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，易知 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3$，但 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

定理 6 若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 必可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表出系数唯一.

证明 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，易知 $k\neq 0$（否则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，与已知条件矛盾），所以

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_s}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_s.$$

再证表示法的唯一性. 若 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种表示方法，不妨设为

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$
$$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

两式相减得

$$(x_1-y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_s-y_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，故表出系数全为零，即 $x_1-y_1=x_2-y_2=\cdots=x_s-y_s=0$，也即 $x_1=y_1,x_2=y_2,\cdots,x_s=y_s$，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 的表出系数唯一.

关于两个向量组间的线性关系，有以下定义.

定义 6 设有两个向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$； （Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$. 若向量组（Ⅱ）中的每一个向量都能由向量组（Ⅰ）线性表出，则称向量组（Ⅱ）能由向量组（Ⅰ）线性表出.

由定义知，若向量组（Ⅱ）能由向量组（Ⅰ）线性表出，则存在 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{sj}\ (j=1,2,\cdots,t)$ 使得

$$\boldsymbol{\beta}_j=k_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{sj}\boldsymbol{\alpha}_s=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{sj}\end{pmatrix}(j=1,2,\cdots t),$$

故
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1t}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{st}\end{pmatrix},$$

其中矩阵 $\boldsymbol{K}_{st}=(k_{ij})_{s\times t}$ 称为这一线性表出的系数矩阵.

定理 7 设有两向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$； （Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$. 向量组（Ⅱ）能由向量组（Ⅰ）线性表出，若 $s<t$，则向量组（Ⅱ）线性相关.

证明 设

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1t}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{st}\end{pmatrix},\tag{3.16}$$

即
$$\boldsymbol{\beta}_j=k_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+k_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{sj}\boldsymbol{\alpha}_s(j=1,2,\cdots,t).$$

需证存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 使

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}=\mathbf{0}.\tag{3.17}$$

将式(3.16) 代入式(3.17)，得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1t}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{st}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}=\mathbf{0}.\tag{3.18}$$

显然，欲使式(3.18) 成立，只需令诸 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的系数为零，从而得到齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1t}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{st}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

由于 $s<t$，故上述齐次线性方程组有非零解，即式(3.17) 中的 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 可以不全为零，从而向量组（Ⅱ）线性相关.

注 向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）线性表出，也就说向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）生成. 定理 7 的另一种说法：若生成的向量组中向量个数大于原向量组中向量的个数，则生成的向量组必线性相关. 可简记为：多者若能由少者线性表出，多者必线性相关. 此外，还要注意，这时无须考虑的是向量组（Ⅰ）是否线性相关.

推论 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，且它可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，则 $t\leqslant s$.

习　题　3.3

1. 判断下列向量组线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-5,2)^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,2,7,-1)^{\mathrm{T}}$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,4,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,4,11,12)^{\mathrm{T}}$.

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,k+1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(k,2,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(k,1,0)^{\mathrm{T}}$. 问

(1) k 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关?线性无关?

(2) k 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?线性无关?

(3) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

3. 判断下列命题是否正确?为什么?

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中，任意两个向量均线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 存在一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，任意两个向量均线性相关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(4) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关，则其中每个向量均可被其他 $s-1$ 个向量线性表出.

(5) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中存在某个向量是其余向量的线性组合 $\Leftrightarrow |(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)|=0$.

(6) $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

(7) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

4. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，问 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 是否线性无关?为什么?

5. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

6. (选择题) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 n 维向量，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2$，则(　　).

A. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性无关

B. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性相关

C. 仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关

D. 仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表出系数全不为零. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中任意三个向量均线性无关.

3.4 向量组的秩

3.4.1 向量组的极大线性无关组与向量组的秩

定义 7 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，如果存在 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关，并且任意 $r+1$ 个向量（如果存在的话）均线性相关，则称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组. 数 r 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩，记作秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$ 或 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$.

例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，易知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而该向量组中任意四个向量均线性相关，由定义知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组的一个极大线性无关组，同时容易判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组.

注 一般来说，一个向量组的极大线性无关组不唯一，由以下定理可知向量组的极大线性无关组中向量的个数（即向量组的秩）是唯一的.

定理 8 一个向量组的秩是唯一的.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 均为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组. 下证 $r=t$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组的一个极大线性无关组，添加 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 中的任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{j_k}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_{j_k}$ 必线性相关，因此，$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出. 由定理 7 的推论知，$t\leqslant r$，类似证明可得到 $r\leqslant t$，故 $r=t$.

一个向量组确定了，那么它的秩就唯一确定了.

只含零向量的向量组的秩为 0，即 $r(\mathbf{0})=0$.

显然，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$.

定理 9 如果 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性无关部分组，它是极大线性无关组的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的每一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出.

证明 必要性. 若 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组，则当 j 是 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 中的数时，显然 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出，而当 j 不是 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 中的数时，由定义 7 可知，$\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性相关. 又 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性无关，由定理 6 知 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出.

充分性. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任何 $r+1(s>r)$ 个向量都线性相关，又 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性无关，由定义 7 知，$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 是极

大线性无关组.

定理 10 若向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,则 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$.

证明 设 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$,而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组(Ⅰ)的一个极大线性无关组;$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=p$,而 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_p}$ 为(Ⅱ)的一个极大线性无关组.

因已知向量组(Ⅰ)可以被向量组(Ⅱ)线性表出,故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可被向量组(Ⅱ)线性表出. 而向量组(Ⅱ)又可被其极大线性无关组 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_p}$ 线性表出,因此 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可以被 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_p}$ 线性表出. 由定理 7 的推论知 $r\leqslant p$,即 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$.

3.4.2 向量组的秩与矩阵的秩的关系

一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以看做是由它的 m 个 n 维行向量构成的,也可以看做是由它的 n 个 m 维列向量构成的. 通常称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**,称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩为 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**. 那么,矩阵的秩与它的行秩、列秩之间的关系如何呢?

定理 11 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$,有 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩.

证明 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,则结论显然成立. 下面证 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 的情况. 若能证明 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩,则有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩,故只需证明 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩即可.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则在 r 中存在 r 阶子式 $D_r\neq 0$,并且 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全都为零. 下面证明 D_r 所在的 r 列为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组,从而证得 $\boldsymbol{A}$ 的列秩也为 r,也就证明了 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩.

由 $D_r\neq 0$ 知,$\boldsymbol{A}$ 中由 D_r 所在的 r 列所构成的 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵的秩为 r,于是由定理 4 的推论 1 知,D_r 所在的 r 列线性无关. 如果 $\boldsymbol{A}$ 只有 r 列,则 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 r,从而有 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩;如果 $\boldsymbol{A}$ 的列数大于 r,任取 $\boldsymbol{A}$ 中 D_r 所在的 r 列以外的 1 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,由于 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式都为零,故由 D_r 所在的 r 列与 $\boldsymbol{\alpha}$ 一起构成的 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵的秩小于 $r+1$,于是由定理 4 知这 $r+1$ 列线性相关,再由定理 6 知 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 D_r 所在的 r 列线性表出,因此,D_r 所在的 r 列为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组.

注 (1) 矩阵的秩与其行秩、列秩三者相等,通常称为矩阵的三秩相等. 这是线性代数中非常重要的结论,它反映了矩阵内在的重要性质.

(2) 由定理 11 的证明可知,若 D_r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式,则 D_r 所在的 r 列就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组;D_r 所在的 r 行即是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的一个极大线性无关组.

3.4.3 如何求向量组的秩及极大线性无关组

定理 12 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的任何对应的列向量组具有相同的线性关系,即若

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=\boldsymbol{B},$$

则列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant s)$ 具有相同的线性关系.

证明 设 $\boldsymbol{A}_1=(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r})$，$\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r})$，已知 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$，而 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中部分列构成，故相当于同样的初等行变换使 $\boldsymbol{A}_1\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}_1$. 根据消元法知，齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为同解方程组，即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\boldsymbol{0}\text{ 与 }x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}=\boldsymbol{0}$$

同解. 若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同时有非零解，即存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 使 $x_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\boldsymbol{0}$ 成立，也使 $x_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+x_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}=\boldsymbol{0}$ 成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 同时线性相关，且有相同的组合系数，若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同时只有零解，说明这两组向量同时线性无关.

注 所谓有相同的线性关系是指它们有相同的线性相关性与线性表出性.

定理 12 提供了求向量组的极大无关组及其余向量用极大无关组线性表示的方法. 即以向量组中各向量为列向量组成矩阵后，只作初等行变换将该矩阵化为行阶梯形矩阵，则可直接写出所求向量组的极大无关组并可写出其余向量用此极大无关组线性表出的表示式.

同理，也可以向量组中各向量为行向量组成矩阵，通过初等列变换来求向量组的极大线性无关组.

例 17 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,6,4,-1)^{\mathrm{T}}$. 求向量组的秩和一个极大线性无关组，并把其余的向量用这个极大线性无关组线性表出.

解 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换将其化为阶梯形矩阵，

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=\boldsymbol{B},$$

容易判断，阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中，主元所在的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所对应的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性无关. 而 $\boldsymbol{B}$ 的列组中 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 再任加一个向量 $\boldsymbol{\beta}_3$ 或 $\boldsymbol{\beta}_5$ 则线性相关. 故 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=3$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 为其一个极大线性无关组. 相应的 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为其一个极大线性无关组.

再把 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，可继续对 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换化为简化行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$，即

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4,\boldsymbol{u}_5)=\boldsymbol{U},$$

易得 $\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_5=\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$.

例 18 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-2,t+4,-1)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大线性无关组.

解 向量的分量中含参数 t，向量组的秩和极大线性无关组与 t 的取值有关. 对下列矩阵作初等行变换得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&0&-4&-2\\-1&t&5&t+4\\1&0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-4&-8\\0&t+2&5&t+7\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&0&3-t&3-t\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且

(1) 当 $t=3$ 时，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是极大线性无关组；

(2) 当 $t\neq 3$ 时，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是极大线性无关组.

例 19 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 及 $\boldsymbol{B}_{n\times s}$ 为两个矩阵，证明：

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}.$$

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times s}=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_s)$，即

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1j}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&\cdots&b_{2j}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nj}&\cdots&b_{ns}\end{pmatrix},$$

因此有

$$r_j = b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{\alpha}_n \quad (j = 1,2,\cdots,s).$$

即$\boldsymbol{AB}$的列向量组$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_s$可由$\boldsymbol{A}$的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表出，故$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_s$的极大线性无关组可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的极大线性无关组线性表出，由定理10知$r(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_s) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，即$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{A})$.

类似地，设

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{AB} = (a_{ij})\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix},$$

可以证明$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B})$. 因此$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

习　题　3.4

1. 判断下列各命题是否正确. 如果正确，请简述理由；如果不正确，请举出反例.

(1) 设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = r < n$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的任意$r$个列向量线性无关.

(2) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，且可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表出，则必有$s<t$.

(3) 设$\boldsymbol{A}$为$m \times n$矩阵，如果矩阵$\boldsymbol{A}$的n个列向量线性无关，那么$r(\boldsymbol{A}) = n$.

(4) 如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$s$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任一部分向量组都线性无关.

2. 求下列向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表出.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,2,-3)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1,-1,3),\boldsymbol{\alpha}_3 = (5,-2,8,-9),\boldsymbol{\alpha}_4 = (-1,3,1,7)$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,0,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,5,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4 = (3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$.

3. 求下列矩阵列向量组的一个极大线性无关组.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2,求 a,b.

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,且 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$,证明存在某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_k(2\leqslant k\leqslant m)$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1}$ 线性表出.

6. 设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,向量组(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$,若 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=3,r(\text{Ⅲ})=4$,试证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

3.5 线性方程组解的结构

3.5.1 齐次线性方程组解的结构

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{3.19}$$

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则方程组(3.19)可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}. \tag{3.20}$$

称方程组(3.20)的解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为方程组(3.19)的**解向量**.

下面来讨论方程组(3.20)的解的性质.

性质 1 若 ξ_1,ξ_2 为方程组(3.20)的解,则 $\xi_1+\xi_2$ 也是该方程组的解.

证明 因为 ξ_1,ξ_2 是方程组(3.20)的解,所以 $\boldsymbol{A}\xi_1=\mathbf{0},\boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0},\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0}$,所以 $\xi_1+\xi_2$ 是方程组(3.20)的解.

性质 2 若 ξ_1 为方程组(3.20)的解,k 为实数,则 $k\xi_1$ 也是方程组(3.19)的解.

证明 因为 ξ_1 是方程组(3.20)的解,所以 $\boldsymbol{A}\xi_1=\mathbf{0},\boldsymbol{A}(k\xi_1)=k\boldsymbol{A}\xi_1=k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$,即 $k\xi_1$ 是方程组(3.20)的解.

注 性质 1、性质 2 说明齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解集合 $S_0=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}\}$ 对于

加法与数乘两种运算是封闭的，即

若 $\boldsymbol{\xi} \in S_0$，则 $k\boldsymbol{\xi} \in S_0$（$k$ 为任意实数）；

若 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \in S_0$，则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta} \in S_0$.

根据上述性质容易推出：若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是线性方程组(3.20)的解，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任何实数，则线性组合 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$ 也是方程组(3.20)的解.

由1.1节知，齐次线性方程组若有非零解，则它就有无穷多个解. 这无穷多解就构成了一个 n 维向量组. 由于当 $p>n$ 时，p 个 n 维向量必然线性相关，若能证明存在解向量组的极大线性无关组显然由有限个向量构成且能求出解向量组的一个极大线性无关组，就能够用它的线性组合表出全部解（也称通解）.

定义 8 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的有限个解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 满足：

(1) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关；

(2) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任意一个解向量均可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性表出，则称 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

按照上述定义，若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次线性方程组的一个基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解可表示为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_t\boldsymbol{\eta}_t$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_t$ 是任意常数.

注 由上述定义知，方程组的基础解系是它的解向量组的一个极大线性无关组. 由于向量组的极大线性无关组不是唯一的，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系也不是唯一的，但每个基础解系中所含向量个数是相同的. 以下的定理将给出基础解系中向量的个数.

当一个齐次线性方程组只有零解时，该方程组没有基础解系；而当一个齐次线性方程组有非零解时，是否一定有基础解系呢？如果有的话，怎样去求它的基础解系？下面的定理回答了这些问题.

定理 13 对齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则该方程组的基础解系一定存在，且每个基础解系中所含解向量的个数均为 $n-r$，其中 n 为方程组中所含未知量的个数.

证明 因为 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，故对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换（必要时可交换未知量的位置），总可化为形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & k_{1,r+1} & k_{1,r+2} & \cdots & k_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & k_{2,r+1} & k_{2,r+2} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & k_{r,r+1} & k_{r,r+2} & \cdots & k_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的形式，即齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与下面方程组同解.

$$\begin{cases} x_1 = -k_{1,r+1}x_{r+1} - k_{1,r+2}x_{r+2} - \cdots - k_{1n}x_n, \\ x_2 = -k_{2,r+1}x_{r+1} - k_{2,r+2}x_{r+2} - \cdots - k_{2n}x_n, \\ \quad\vdots \\ x_r = -k_{r,r+1}x_{r+1} - k_{r,r+2}x_{r+2} - \cdots - k_{rn}x_n, \end{cases} \tag{3.21}$$

其中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为自由未知量.

对 $n-r$ 个自由未知量分别取

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

代入式(3.21),即可得到方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 $n-r$ 个解:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -k_{1,r+1} \\ -k_{2,r+1} \\ \vdots \\ -k_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -k_{1,r+2} \\ -k_{2,r+2} \\ \vdots \\ -k_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{pmatrix} -k_{1n} \\ -k_{2n} \\ \vdots \\ -k_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

下面证 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 就是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

首先证明 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

因为 $n-r$ 个 $n-r$ 维向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关,由例 16 的结论可知,$n-r$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 也线性无关.

再证方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解都可表示为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的线性组合. 因为

$$\begin{cases} x_1 = -k_{1,r+1}x_{r+1} - k_{1,r+2}x_{r+2} - \cdots - k_{1n}x_n, \\ x_2 = -k_{2,r+1}x_{r+1} - k_{2,r+2}x_{r+2} - \cdots - k_{2n}x_n, \\ \quad\vdots \\ x_r = -k_{r,r+1}x_{r+1} - k_{r,r+2}x_{r+2} - \cdots - k_{rn}x_n, \end{cases}$$

所以

$$
\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -k_{1,r+1}x_{r+1}-k_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-k_{1n}x_n \\ \vdots \\ -k_{r,r+1}x_{r+1}-k_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-k_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

$$
=x_{r+1}\begin{pmatrix} -k_{1,r+1} \\ -k_{2,r+1} \\ \vdots \\ -k_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+x_{r+2}\begin{pmatrix} -k_{1,r+2} \\ -k_{2,r+2} \\ \vdots \\ -k_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix} -k_{1n} \\ -k_{2n} \\ \vdots \\ -k_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
=x_{r+1}\boldsymbol{\eta}_1+x_{r+2}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\eta}_{n-r},
$$

即 $\boldsymbol{x}$ 可表示为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的线性组合.因此,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

注 (1) 本定理回答了第 1 章中克莱姆定理的推论中所留下的问题.那里曾指出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$(注意 $\boldsymbol{A}$ 为方阵)有非零解的必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$,现在我们知道 $|\boldsymbol{A}|=0$(即 $r(\boldsymbol{A})<n$)时,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.于是可以得出结论:$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$.

(2) 本定理的证明实际上给出了求齐次线性方程组基础解系的方法.

(3) 本定理给出齐次线性方程组解的结构的一个重要特征:系数矩阵的秩 + 基础解系所含向量的个数 = 未知量的个数.

(4) 若已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的全部解可以表示为 $c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$,称为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意实数.

例 20 求齐次线性方程组

$$
\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}
$$

的基础解系与通解.

解　对系数矩阵 A 作初等行变换，化为简化行阶梯形矩阵，有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\7&-7&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&-14&10&8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可得同解的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{7}x_2+\dfrac{3}{7}x_4,\\ x_2=\dfrac{5}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4,\end{cases}\tag{3.22}$$

其中 x_3,x_4 为自由未知量.

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则对应有 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\end{pmatrix}$，即得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix},$$

由此可得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbf{R}).$$

根据式(3.22)，如果取自由未知量为 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，相应得到 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{7}\\\frac{9}{7}\end{pmatrix}$ 及

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$，即得另一组基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

从而得到通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

两个通解虽然形式不一样，但都含两个任意常数，且都可表示方程组的任一解.

例 21 用基础解系表示如下线性方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，化为简化行阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

即可得到同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4+2x_5,\\x_2=x_3-3x_4+x_5.\end{cases}$$

其中 x_3,x_4,x_5 为自由未知量.

令自由未知量 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$ 取值 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

因此,方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+c_3\boldsymbol{\eta}_3(c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}).$$

例 22　设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{0}$,证明 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明　记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_l)=(0,0,\cdots,0)$,故 $\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{0}\ (i=1,2,\cdots,l)$. 即 $\boldsymbol{B}$ 的 l 个列向量均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,那么 $\boldsymbol{B}$ 中列向量组的秩必小于等于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量的个数,即有 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)\leqslant n-r(\boldsymbol{A})$,所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

3.5.2　非齐次线性方程组解的结构

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{3.23}$$

方程组(3.23)的矩阵形式为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.\tag{3.24}$$

称 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组(也称为**导出组**).

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解集 $S_b=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\}$ 对于加法、数乘两种运算不再具有封闭性. 事实上,若 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in S_b$,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A\xi}+\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}$,这说明 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}\notin S_b$. 但非齐次线性方程组的解与其导出组的解之间却有下列性质.

性质 3　设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$

的解.

证明 由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解知,$\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

性质 4 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解,$\boldsymbol{\eta}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

证明 由 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A\xi}+\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

定理 14 设 $\boldsymbol{\xi}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解(称为特解),$\boldsymbol{\eta}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解,则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}^*+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

证明 根据非齐次线性方程组解的性质,只需证 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 $\boldsymbol{\xi}$ 一定能表示成 $\boldsymbol{\xi}^*$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的某一解 $\boldsymbol{\eta}_1$ 的和. 为此取 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}^*$,由性质 3 知,$\boldsymbol{\eta}_1$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解,故 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi}^*$,即非齐次线性方程组的任一解都能表示成该方程组的一个特解 $\boldsymbol{\xi}^*$ 与其导出组某一个解的和.

由此定理可知,若设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\xi}^*$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解,则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解可表示为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+\boldsymbol{\xi}^*\ (c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}\in\mathbf{R}).$$

这就是非齐次线性方程组解的结构理论:$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解相加.

根据上面的讨论,我们可以把求解非齐次方程组的全部解的步骤归纳如下.

(1) 对方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$ 施以初等行变换,化为阶梯形矩阵,然后写出相对应的阶梯形方程组(与原方程组同解).

(2) 通过阶梯形方程组确定自由未知量,将含自由未知量的项移至方程右边.

(3) 求非齐次方程组的一个特解:在第(2) 步的方程组中将自由未知量任意取值(特别取零值最为简便) 之后便可求出其他未知量之值,这样即可得到一个特解.

(4) 求出导出组的一个基础解系(这时需令第(2) 步中方程组的常数项为 0).

(5) 非齐次方程组的全部解(或通解) 就是特解加上导出组的基础解系的线性组合(原方程组的特解 + 导出组的通解).

例 23 求下列方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7, \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4-3x_5=-2, \\ \qquad 2x_2+x_3+2x_4+6x_5=23. \end{cases}$$

解 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&7\\3&1&2&1&-3&-2\\0&2&1&2&6&23\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&\frac{1}{2}&0&-2&-\frac{9}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&1&3&\frac{23}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$,

由 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<5$ 知,方程组有无穷多解,同解的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_3-2x_5=-\frac{9}{2},\\x_2+\frac{1}{2}x_3+x_4-3x_5=\frac{23}{2},\end{cases}$$

将其改写为

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3+2x_5-\frac{9}{2},\\x_2=-\frac{1}{2}x_3-x_4-3x_5+\frac{23}{2}.\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,得原方程组的一个特解为

$$\boldsymbol{\xi}^*=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\\frac{23}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3+2x_5,\\x_2=-\frac{1}{2}x_3-x_4-3x_5\end{cases}$$

同解,其中 x_3,x_4,x_5 为自由未知量.

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,即得导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

因此,方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}^*+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+c_3\boldsymbol{\eta}_3$,其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

例 24 设线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda.\end{cases}$$

问 λ 取何值时,此线性方程组(1) 有唯一解;(2) 无解;(3) 有无穷多解?并在有无穷多解时求其通解.

解 把 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化为行阶梯形矩阵:

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&3\\1&1&1+\lambda&\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1+\lambda&\lambda\\1&1+\lambda&1&3\\1+\lambda&1&1&0\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&-\lambda&-\lambda(2+\lambda)&-\lambda(1+\lambda)\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&0&-\lambda(3+\lambda)&(1-\lambda)(3+\lambda)\end{array}\right).$$

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3=n$,此时方程组有唯一解;

(2) 当 $\lambda=0$ 时,有

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

此时 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$,$r(\boldsymbol{A})=1$,故线性方程组无解;

(3) 当 $\lambda=-3$ 时,有

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&-3\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

此时 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$,故线性方程组有无穷多解,同解的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3-1,\\x_2=x_3-2,\end{cases}$$

x_3 为自由未知量. 令 $x_3=0$,得方程组的一个特解为

$$\boldsymbol{\xi}^*=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix},$$

原方程组的导出组与方程组

$$\begin{cases}x_1=x_3,\\x_2=x_3\end{cases}$$

同解,x_3 为自由未知量. 令 $x_3=1$,可得导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

因此,原方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}^*+c\boldsymbol{\eta}$ (c 为任意常数).

习　题　3.5

1. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0,\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0,\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0,\\3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0,\\8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0;\end{cases}$

(3) $nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是某个齐次线性方程组的基础解系. 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是该齐次线性方程组的基础解系.

3. 求下列非齐次线性方程组的一个解及其导出组的基础解系:

(1) $\begin{cases}x_1+x_2=5,\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1,\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11,\\5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1,\\2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6.\end{cases}$

4. 设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,已知它的 3 个解向量为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$,其中 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\\2\end{pmatrix}$,求该方程组的通解.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 2 个线性无关的解向量,试求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的全部解.

6. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，证明 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是它的解.

3.6 投入产出数学模型

投入产出分析是美国经济学家列昂节夫于 20 世纪 30 年代首先提出的，他利用线性代数的理论和方法，研究一个经济系统（企业、地区、国家等）的各部门之间错综复杂的联系，建立起相应的数学模型（投入产出模型），用于经济分析和预测. 目前这种分析方法已在全世界 90 多个国家和地区得到了普遍的推广和应用. 自 20 世纪 60 年代起，我国就开始把投入产出分析方法应用于各地区及全国的经济平衡分析. 这一方法已成为我国许多部门、地区进行现代管理的重要工具.

3.6.1 投入产出平衡表

设一个经济系统可以分为 n 个生产部门，各部门分别用 $1,2,\cdots,n$ 表示. 部门 i 只生产一种产品 i，并且没有联合生产，即产品 i 仅由部门 i 生产. 每一生产部门，一方面以自己的产品分配给各部门作为生产资料或满足社会的非生产性消费需要，并提供积累. 另一方面，每一生产部门在其生产过程中也要消耗各部门的产品，所以各部门之间形成了一个复杂的相互交错的关系，这一关系可以用投入产出（平衡）表来表示. 利用某一年的实际统计数据，可先编制出投入产出表，并进一步建立相应的投入产出（数学）模型.

投入产出模型按计量单位的不同，可分为价值型和实物型两种，在价值型模型中，各部门的投入、产出均以货币单位表示；在实物型模型中，则按各产品的实物单位（如米、公斤、吨等）表示. 本书只讨论价值型的投入产出模型. 因此，后面提到的诸如“产品”、“总产品”、“中间产品”、“最终产品”等，分别指“产品的价值”、“总产品的价值”、“中间产品的价值”、“最终产品的价值”等.

可以利用某年的经济统计数据来编制投入产出表（见表 3.1）. 为方便起见，表中采用了下列记号：

$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 i 的总产品；

$y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 i 的最终产品；

$x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 i 分配给部门 j 的产品量，或称为部门 j 在生产过程中需消耗部门 i 的产品量；

$v_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 j 的劳动报酬；

$m_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 j 的纯收入；

$z_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 j 新创造的价值.

z_j 是部门 j 的劳动报酬 v_j（工资、奖金及其他劳动收入）与纯收入 m_j（税金、利润等）的

总和.

表 3.1　价值型投入产出表

产出 部门间流量 投入		中间产品							最终产品				总产品
		部门 1	部门 2	…	部门 j	…	部门 n	合计 $\sum$	积累	消费	…	合计 $\sum$	
物质消耗	部门 1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$\sum\limits_j x_{1j}$				y_1	x_1
	部门 2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	$\sum\limits_j x_{2j}$				y_2	x_2
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮				⋮	⋮
	部门 n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	$\sum\limits_j x_{nj}$				y_n	x_n
合计 $\sum$		$\sum\limits_i x_{i1}$	$\sum\limits_i x_{i2}$	…	$\sum\limits_i x_{ij}$	…	$\sum\limits_i x_{in}$	$\sum\limits_i\sum\limits_j x_{ij}$				$\sum\limits_i y_i$	$\sum\limits_i x_i$
新创造价值	劳动报酬	v_1	v_2	…	v_j	…	v_n	$\sum\limits_j v_j$					
	纯收入	m_1	m_2	…	m_j	…	m_n	$\sum\limits_j m_j$					
	合计 $\sum$	z_1	z_2	…	z_j	…	z_n	$\sum\limits_j z_j$					
总投入		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	$\sum\limits_j x_j$					

投入产出表分四个部分，称为 4 个象限.

左上角为第Ⅰ象限，在这一部分中，每一个部门都以生产者和消费者的双重身份出现. 从每一横行看，该部门作为生产部门以自己的产品分配给各部门；从每一纵列看，该部门又作为消耗部门在生产过程中消耗各部门的产品. 行与列交叉点是部门间流量，这个量也是以双重身份出现，它是行部门分配给列部门的产品量，也是列部门消耗行部门的产品量.

第 Ⅰ 象限反映了该经济系统生产部门之间的技术性联系，它是投入产出表的最基本部分.

右上角为第 Ⅱ 象限，反映了各部门用于最终产品的部分. 从每一横行来看，反映了该部门最终产品的分配情况；从每一纵列看，表明用于消费、积累等方面的最终产品分别由各部门提供的数量.

左下角为第 Ⅲ 象限，反映了总产品中新创造的价值部分. 每一列指出该部门的新创造价值，包括劳动报酬和该部门创造的纯收入.

右下角为第 Ⅳ 象限，反映了总收入的再分配，比较复杂，有待进一步研究.

3.6.2　平衡方程

1. 产品分配平衡方程组

从表 1 的行来看，第 Ⅰ、Ⅱ 象限每一行存在一个等式，即每一个部门作为生产部门分配给各部门用于生产消耗的产品，加上它本部门的最终产品，应等于它的总产品. 即

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{3.25}$$

这个方程组称为产品分配平衡方程组.

在式(3.25)中，$\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ 为第 i 部门分配给各部门生产消耗的产品总和.

2. 产值构成平衡方程组

从表 1 的列来看，第Ⅰ、Ⅲ象限的每一列也存在一个等式，即每一个部门作为消耗部门，各部门为它的生产消耗转移的产品价值加上它本部门新创造的价值，应等于它的总产值. 即

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{3.26}$$

这个方程组称为产值构成平衡方程组.

3.6.3 直接消耗系数

定义 9 第 j 部门生产单位产品直接消耗第 i 部门的产品量，称为第 j 部门对第 i 部门的直接消耗系数，以 a_{ij} 表示，即

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n). \tag{3.27}$$

换句话说，a_{ij} 也就是第 j 部门生产单位产品需要第 i 部门直接分配给第 j 部门的产品量.

物质生产部门之间的直接消耗系数，基本上是技术性的，因而是相对稳定的，通常也称为技术系数.

各部门间的直接消耗系数构成的 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为直接消耗系数矩阵.

直接消耗系数 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 具有下列性质.

(1) $0 \leqslant a_{ij} < 1 \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$.

事实上，由 $x_{ij} \geqslant 0, x_j > 0$，且 $x_{ij} < x_j$，以及 $a_{ij} = x_{ij}/x_j (i,j = 1,2,\cdots,n)$，即可得到上述结论.

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad (j = 1,2,\cdots,n)$.

事实上，由 $x_{ij} = a_{ij}x_j$，产值构成平衡方程(3.26)可化为

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + z_j \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

整理后得

$$(1-\sum_{i=1}^{n}a_{ij})x_j = z_j \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

又因 $x_j > 0, z_j > 0 (j=1,2,\cdots,n)$，所以

$$1-\sum_{i=1}^{n}a_{ij} > 0 \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

从上式即推得所证结论.

利用直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，产品分配平衡方程组和产值构成平衡方程组可以写成矩阵形式.

将 $x_{ij}=a_{ij}x_j$ 代入产品分配平衡方程组(3.25)得

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \quad \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + y_n, \end{cases} \tag{3.28}$$

或写成

$$x_i = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j + y_i \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{3.29}$$

设

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则方程组(3.28)可以写成矩阵形式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \quad 或 \quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \tag{3.30}$$

将 $x_{ij}=a_{ij}x_j$ 代入产值构成平衡方程组(3.26)得

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{n1}x_1 + z_1, \\ x_2 = a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_2 + z_2, \\ \quad \vdots \\ x_n = a_{1n}x_n + a_{2n}x_n + \cdots + a_{nn}x_n + z_n, \end{cases} \tag{3.31}$$

或写成

$$x_j = \sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j + z_j \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{3.32}$$

设

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_{i1} & & & \\ & \sum_{i=1}^{n}a_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^{n}a_{in} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

则方程组(3.31)可以写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\quad\text{或}\quad(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}. \tag{3.33}$$

3.6.4 平衡方程组的解

利用投入产出数学模型进行经济分析时，首先要根据经济系统报告期的数据求出直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，并假设在未来计划期内直接消耗系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 不发生变化，则由方程组(3.30)和方程组(3.33)可求得平衡方程组的解.

1. 解产品分配平衡方程组

在方程组(3.30)中，分以下两种情况讨论.

(1) 如果已知 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则可求得

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}.$$

(2) 如果已知 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则可以证明矩阵 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 为非负矩阵，于是可求得

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y}.$$

2. 解产值构成平衡方程组

在方程组(3.33)中，分以下两种情况讨论.

(1) 如果已知 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则可求得

$$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}.$$

(2) 如果已知 $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$，则可求得

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{z}.$$

不难求出

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}=\begin{pmatrix}(1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i1})^{-1} & & & \\ & (1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i2})^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_{in})^{-1}\end{pmatrix},$$

因此，有

$$x_j=\frac{z_j}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

例 25 设有一个经济系统包括三个部门，在某一个生产周期内各部门间的消耗系数及最终产品如表 3.2 所示.

表 3.2 各部门间的消耗系数与最终产品

消耗部门 消耗系数 生产部门	1	2	3	最终产品
1	0.25	0.1	0.1	245
2	0.2	0.2	0.1	90
3	0.1	0.1	0.2	175

求各部门的总产品及部门间的流量.

解 设 $x_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 部门的总产品.已知

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix}0.25 & 0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}=(245,90,175)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.75 & -0.1 & -0.1\\ -0.2 & 0.8 & -0.1\\ -0.1 & -0.1 & 0.8\end{pmatrix},$$

可以求得 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{10}{891}\begin{pmatrix}126 & 18 & 18\\ 34 & 118 & 119\\ 20 & 17 & 116\end{pmatrix}$,所以

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y}=\frac{10}{891}\begin{pmatrix}126 & 18 & 18\\ 34 & 118 & 19\\ 20 & 17 & 116\end{pmatrix}\begin{pmatrix}245\\ 90\\ 175\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\ 250\\ 300\end{pmatrix}.$$

如果部门很多时,可借助计算机求近似解.

由 $x_{ij}=a_{ij}x_j(i,j=1,2,\cdots,n)$,按 $x_1=400,x_2=250,x_3=300$ 可计算部门间的流量:

$$x_{11}=100,\quad x_{12}=25,\quad x_{13}=30,$$
$$x_{21}=80,\quad x_{22}=50,\quad x_{23}=30,$$
$$x_{31}=40,\quad x_{32}=25,\quad x_{33}=60.$$

现将所求得的各部门的总产量及部门间流量如表 3.3 所示.

表 3.3　各部门的总产量及部门间流量

x_{ij} 消耗部门 / 生产部门	1	2	3	y	x
1	100	25	30	245	400
2	80	50	30	90	250
3	40	25	60	175	300

小　　结

本章主要讨论了一般线性方程组的理论和求解方法，为此还讨论了向量间的线性关系．这些是线性代数这门课程的重点内容．

解一般线性方程组所用的方法就是中学所讲的消元法，其原理是将线性方程组通过消元简化为容易求解的同解方程组，解同解方程组即可确定原方程组是无解还是有解，在有解的情况下可求得其全部解．在线性代数中将上述消元过程转化为矩阵（线性方程组的增广矩阵）的初等行变换．这不仅使消元过程书写简明，更重要的是证明了消元法最后所得的独立方程的个数就是增广矩阵的秩，因而由原方程组唯一确定，不受消元过程的影响．

解线性方程组的理论如下．

(1) 对于一般线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \tag{Ⅰ}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵．以下三个数很重要：系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$，增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ 的秩 $r(\overline{\boldsymbol{A}})$，未知量个数 n，而方程组中方程个数 m 则无关紧要．

$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) \Leftrightarrow$ 方程组（Ⅰ）有解．

在有解的条件下（即 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}})$）：

$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r = n \Leftrightarrow$ 方程组（Ⅰ）有唯一解；

特别当 $m = n$ 时，方程组（Ⅰ）有唯一解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}_{n\times n}| \neq 0$（克拉默法则包含其中）；

$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r < n \Leftrightarrow$ 方程组（Ⅰ）有无穷多解，此时有 $n - r$ 个自由未知量；

当 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$ 时，方程组（Ⅰ）无解．

(2) 对于齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}. \tag{Ⅱ}$$

方程组（Ⅱ）是方程组（Ⅰ）中 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ 的特例，故可直接利用方程组（Ⅰ）的结论．注意到方程组（Ⅱ）一定有解，零解就是其中之一，故有

$r(\boldsymbol{A}) = r = n \Leftrightarrow$ 方程组（Ⅱ）只有零解（等价于有唯一解）；

特别当 $m = n$ 时，方程组（Ⅱ）只有零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}_{n\times n}| \neq 0$，方程组（Ⅱ）有非零解 $\Leftrightarrow$

$|A_{n\times n}| = 0$；

$r(A) = r < n \Leftrightarrow$ 方程组(Ⅱ)有非零解(等价于有无穷多解)，此时有 $n-r$ 个自由未知量.

关于向量，主要介绍了向量的线性表出、线性相关、线性无关、向量组的秩等概念. 而 n 元向量的线性关系当向量的分量具体给出时，实际上都可归结为线性方程组的理论来解决. 以下的向量均为 n 维列向量.

① $\boldsymbol{\beta}$ 能(否) 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有(无) 解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 与 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$ 是否相等.

② $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) = s$.

③ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) < s$.

④ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是(否) 线性相关

$\Leftrightarrow$ 行列式 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)|$ 是(否) 为零.

(3) 计算向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组可通过对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 作初等行变换化为阶梯形矩阵而推断出来.

以向量的观点看，$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列向量分块 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出. 于是

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩 $r < n$

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r < n$.

此时，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的所有解向量的极大线性无关组由 $n-r$ 个线性无关的解向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 组成. 于是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解可表示为 $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解可表示为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}_0 + c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数，$\boldsymbol{\xi}_0$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解.

从向量的观点来看，矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 m 元向量，行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是 n 元向量，且有

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) = r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m).$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则有下列等价式：

$|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = n \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

$\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

总 习 题 3

1. 填空题

(1) 使向量组 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,a,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}=(10,3,a)^{\mathrm{T}}$ 线性无关的 a 的值是________

(2) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,6,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a,-2)^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2,则 $a=$ ________.

(3) 若方程个数为 m 的 n 元线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都是 r,则当 r ________ 时,方程组有唯一解;当 r ________ 时,方程组有无穷多解.

2. 选择题

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量可由其余向量线性表出

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有两个向量成比例

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表出

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的任一部分组线性相关

(2) 下列向量组中线性相关的向量组为(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,5,-4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,6,-4)^{\mathrm{T}}$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,5,-4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,6,-4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,7,-4)^{\mathrm{T}}$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,4,9)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,8,27)^{\mathrm{T}}$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(12,4,3)^{\mathrm{T}}$

(3) 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系是 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$,则此方程组的基础解系还可以是(　　).

A. $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4-\boldsymbol{\eta}_1$

B. $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4$

C. 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 等秩的向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$

D. 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 等价的向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$

3. 用消元法解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}-x_1+2x_2=3,\\2x_1+x_2+x_3=2,\\4x_1+5x_2+7x_3=0,\\x_1+x_2+5x_3=-7;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+x_2+3x_3-x_4=-2,\\x_2-x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+2x_3+2x_4=4,\\x_1-x_2+x_3-x_4=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=-1,\\x_1-2x_2+x_3+5x_4=5,\\x_1-2x_2+x_3+x_4=1;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x_1-x_2+4x_3-2x_4=0,\\x_1-x_2-x_3+2x_4=0,\\3x_1+x_2+7x_3-2x_4=0,\\x_1-3x_2-12x_3+6x_4=0.\end{cases}$

4. 确定 a,b 的值使下列线性方程组有解，并求其解.

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = a, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = b. \end{cases}$

5. 已知 $\boldsymbol{\alpha} = (3,6,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (-1,4,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\gamma} = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$. 计算 $\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,5,1,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (10,1,5,10)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，且 $3(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}) + 2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}) = 5(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha})$，求 $\boldsymbol{\alpha}$.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,1,-2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-4,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (-8,8,5)^{\mathrm{T}}$. 求常数 k，使得 $\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_2$.

8. 已知 $\boldsymbol{\beta} = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 可被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,2,5)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,4,7)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (5,6,t)^{\mathrm{T}}$ 线性表出，求 t 的值.

9. 判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,10)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-2,1,5)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,1,4)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (3,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$;

(5) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,4,6,-2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (-2,3,5,9)^{\mathrm{T}}$;

(6) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (b,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (c,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

10. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，试证：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

11. 求下列向量组的秩，并求出它的一个最大线性无关组，把其余向量用最大线性无关组线性表出.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,3)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-2,-4,-2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,5,-6)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,3,1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,0,7,14)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,1,1,4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,2,4,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,4,10,1)^{\mathrm{T}}$.

12. $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，其列向量组线性无关；$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}$. 求证：$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$.

13. 证明：$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$.

14. 解下列齐次线性方程组，若有非零解，求其通解.

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0; \end{cases}$

15. 已知线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0.\end{cases}$
当λ为何值时,线性方程组只有零解?有非零解?并在有非零解时求其通解.

16. 求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=3,\\ x_1+2x_2+x_3=1,\\ x_1-x_2-2x_3=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+7x_3=3,\\ x_1+2x_2+x_3=1,\\ x_2-3x_3=-1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5,\\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7,\\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9,\\ 8x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11.\end{cases}$

17. λ为何值时,线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$$

无解?有唯一解?有无穷多解?并在有无穷多解时求其通解.

18. 设$\boldsymbol{\xi}_0$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$是其导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系,证明:

(1) $\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$线性无关;

(2) $\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$线性无关.

19. 设$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的导出组,其中$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵,则下列哪些命题正确?

(1) 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解,则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解;

(2) 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解,则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解;

(3) 若$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解,$\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解,则$\boldsymbol{\eta}+k\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解;

(4) 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解时,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$也有非零解;

(5) 若$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$均为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解,则$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-2\boldsymbol{x}_3$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个解;

(6) 若$r(\boldsymbol{A})=m$,则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解;

(7) 若$r(\boldsymbol{A})=n$,则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解.

20. 设$\boldsymbol{B}$为三阶非零矩阵,$\boldsymbol{B}$的每一列均为线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\ 2x_1-x_2+ax_3=0,\\ 3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

的解,求a的值及矩阵$\boldsymbol{B}$,并判断$\boldsymbol{B}$是否唯一.

第 4 章　矩阵的特征值与特征向量

4.1　方阵的特征值与特征向量

定义 1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若对于数 λ，存在 n 维非零向量 ξ，使得

$$\boldsymbol{A}\xi = \lambda\xi \tag{4.1}$$

成立，则称数 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**，非零向量 ξ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的一个**特征向量**.

注　式(4.1) 可以等价地写成

$$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\xi = 0; \tag{4.2}$$

而式(4.2) 存在非零列向量的充分必要条件是 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$，即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.3}$$

定义 2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，λ 是一个未知量，矩阵 $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵，行列式 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，方程 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，它的根称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

注　(1) 特征方程在复数范围内恒有解，其个数为方程的次数(重根按重数计算)，因此，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 在复数范围内有 n 个特征值.

(2) 若 ξ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 ξ 的任何一个非零倍数 $k\xi(k \neq 0)$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，又可以推广到有限个的情形(例如，$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$).

(3) 特征向量不是被特征值所唯一决定. 相反，特征值却是被特征向量所唯一决定，因为一个特征向量只能属于一个特征值.

根据上述定义和讨论，即可得出 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的求法.

(1) 计算方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$，求出特征方程 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 的全部根，即方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 对每个不同的特征值 λ_i，求齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 的一个基础解系 ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_s，则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$ ($k_1, k_2, \cdots, k_s$ 不全为零) 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量.

例 1 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 A 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -4\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-14=(\lambda-7)(\lambda+2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=7,\lambda_2=-2$.

当 $\lambda_1=7$ 时,由

$$\begin{pmatrix}7-3 & -4\\ -5 & 7-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得 $x_1=x_2$,求得其基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. 所以 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=7$ 的一个特征向量,而 $k_1\boldsymbol{\xi}_1(k_1\neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=7$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=-2$ 时,由

$$\begin{pmatrix}-2-3 & -4\\ -5 & -2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得 $5x_1=-4x_2$,求得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}4\\ -5\end{pmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{\xi}_2$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_2=-2$ 的一个特征向量,而 $k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_2\neq 0)$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_2=-2$ 的全部特征向量.

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时,解方程 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$,由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

所以 $k_1\boldsymbol{\xi}_1(k_1\neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=0$，由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

所以 $k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_2\neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量.

例 3　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解　由特征方程

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-3\\-3&\lambda+5&-3\\-6&6&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&3&-3\\1&\lambda+5&-3\\0&6&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 有二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，和单特征值 $\lambda_3=4$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，解方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$

$$-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\-6&6&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得同解方程组为　$x_1-x_2+x_3=0$，

解为　$x_1=x_2-x_3$　(x_2,x_3 为自由未知量).

分别令自由未知量

$$(x_2,x_3)=(1,0),\quad (x_2,x_3)=(0,1),$$

解得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\quad (k_1,k_2\text{ 不全为零}).$$

定义 3　特征值 λ_i 的全部特征向量添加零向量构成的线性空间称为 $\boldsymbol{A}$ 的 λ_i 的**特征向量空间**(或称为 λ_i 的特征子空间 0)，记为 $V_{\lambda_i}=\{x\mid(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0\}$.

可见，特征值 $\lambda=-2$ 的特征向量空间是二维的. 注意，对于特征值有重根时，特征向量空间的维数 $\leqslant$ 特征根的重数(证明从略)，例 2、例 3 也验证了这一结果.

对于特征值 $\lambda_3=4$，解方程组 $(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，因

$$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&3&-3\\-3&9&-3\\-6&6&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&12&-6\\0&12&-6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0, \end{cases}$$

通解为
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3, \end{cases} x_3 \text{ 为自由未知量.}$$

令自由未知量 $x_3 = 2$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $\boldsymbol{x} = k_3\boldsymbol{\xi}_3(k_3 \neq 0)$.

下面我们介绍一些常用的性质.

性质 1 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同.

证明 因为
$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|,$$
所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征多项式相同，从而它们的特征值相同.

性质 2 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则有

(1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$；

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|$.

推论 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值不为零.

性质 3 设 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值；当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

证明 已知 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，设 $\boldsymbol{\xi}$ 是特征向量，则有 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$，
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\xi}) = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{A\xi}) = \lambda(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda^2\boldsymbol{\xi}.$$
当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 乘 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$，得到 $\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}$.

推论 1 设 λ 是 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证明 已知 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$，两边同乘以 $\boldsymbol{\xi}$ 得到
$$\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A\xi} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I\xi}, \quad \text{即} \quad \boldsymbol{A}^*\lambda\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\xi},$$
从而有
$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{I}.$$

推论 2 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值；$\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值，其中 $\varphi(x)$ 是 λ 的多项式，$\varphi(\boldsymbol{A})$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.（证明留作练习）

例 4 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$，求 $|\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}|$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不为 0，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 而 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$，所以

$$A^* + 3A - 2I = -2A^{-1} + 3A - 2I = \varphi(A),$$

$\varphi(A)$ 的特征值为 $-1,-3,3$，故 $|A^* + 3A - 2I|$ 的值为 9.

定理 1　设 ξ_1,ξ_2 是方阵 A 的属于两个不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，则 ξ_1,ξ_2 线性无关.

证明　设已知 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$，(k_1,k_2 为常数)，则

$$A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0,$$

即

$$k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 = 0,$$

$$k_1\lambda_1\xi_1 + k_2\lambda_2\xi_2 = 0,$$

因为 $\lambda_1\xi_1$ 和 $\lambda_2\xi_2$ 非零，只有 k_1 和 k_2 为零，所以 ξ_1,ξ_2 线性无关.

定理 2　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是 n 阶矩阵 A 的属于互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 的特征向量，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 线性无关.（用数学归纳法可以证明，此处从略）

定理 2 还可以进一步推广为下面定理，这是实际应用中更常用的结论.

定理 3　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶矩阵 A 的不同特征值，而 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的线性无关的特征向量，则向量组 $\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1k_1},\cdots,\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2k_2},\cdots,\xi_{m1},\xi_{m2},\cdots,\xi_{mk_m}$ 也线性无关.

例 5　设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，ξ_1,ξ_2 是 A 的分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明 $\xi_1 + \xi_2$ 不是 A 的特征向量.

证明　用反证法来证明. 假设 $\xi_1 + \xi_2$ 是 A 的属于 λ 的特征向量，则有

$$A(\xi_1 + \xi_2) = \lambda(\xi_1 + \xi_2),$$

又

$$A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2,$$

所以

$$A(\xi_1 + \xi_2) = \lambda(\xi_1 + \xi_2) = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2,$$

即

$$(\lambda - \lambda_1)\xi_1 + (\lambda - \lambda_2)\xi_2 = 0,$$

又 ξ_1,ξ_2 线性无关，即得

$$(\lambda - \lambda_1) = (\lambda - \lambda_1) = 0,$$

则有 $\lambda_1 = \lambda_2$，与题设矛盾.

习　题　4.1

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $1,2,3$，则 $x =$ ________.

2. 可逆矩阵 A 与矩阵（　　）有相同的特征值.

A. A^{T}　　B. A^{-1}　　C. A^2　　D. $A+E$

3. 求下列矩阵的特征值和特征向量：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = 0$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

5. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3，求 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$.

6. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,−3，求 $|\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}|$.

4.2 相似矩阵

定义 4 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若存在一个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ 成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相似**，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行**相似变换**，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的**相似变换矩阵**.

例如，矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似，因为存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

注 (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 也与 $\boldsymbol{A}$ 相似. 所以通常说 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，也就是指对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中的任一个矩阵总可以找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，通过相似变换化为另一个矩阵.

(2) 相似矩阵具有以下基本性质：

① 相似矩阵的转置矩阵也相似；

② 相似矩阵的幂也相似；

③ 相似矩阵的多项式也相似；

④ 相似矩阵的秩相等；

⑤ 相似矩阵的行列式相等；

⑥ 相似矩阵具有相同的可逆性，当它们都可逆时，它们的逆矩阵也相似；

⑦ 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同；从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同；

⑧ 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.（以上不难证明，读者可以自己证明）

(3) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$，其中 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

而对于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，有

$$\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1{}^k & & & \\ & \lambda_2{}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n{}^k\end{pmatrix},\quad \varphi(\boldsymbol{\Lambda})=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix},$$

由此可方便地计算 $\boldsymbol{A}^k$ 及 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$.

一般地，有以下结论成立：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，则

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+(-1)^n\mid\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}.$$

定义 5　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可相似对角化的，简称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，并称矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

定理 4　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

推论　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相等，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

如二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ 有两个互不相等的特征值 $\lambda_1=7,\lambda_2=-2$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 又 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ 分别是属于 $\lambda_1=7,\lambda_2=-2$ 的特征向量，它们是线性无关的. 若令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

从前面的讨论可知，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似（即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量的个数小于 n）只能发生在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值的情况. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值，则它应具备什么条件才有 n 个线性无关的特征向量呢?给出下面的一个结论.

定理 5　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是属于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数，即对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个 k_i 重特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $n-k_i$.

注 $r(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-k_i$，则齐次线性方程组$(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$的基础解系所含的向量个数为$n-(n-k_i)=k_i$.

例 6 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&a\\1&0&0\end{pmatrix}$，问$a$为何值时，矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化?

解 $$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&-a\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2,$$
得$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$.

对应$\lambda_1=-1$，解方程$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=0$，可求得一个线性无关的特征向量(非零即无关). 故矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化$\Leftrightarrow$对应重根$\lambda_2=\lambda_3=1$有两个线性无关的特征向量$\Leftrightarrow$方程$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$的系数矩阵$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3-2=1$.

由 $$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-a\\-1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-a-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
因为$r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$，则$-a-1=0$，即$a=-1$.

故当$a=-1$时，矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化.

由以上讨论我们知道，并非每一个矩阵都可对角化，那么如何判断n阶矩阵$\boldsymbol{A}$是否可以对角化?并在矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化时，如何求相似变换矩阵$\boldsymbol{P}$?通常可以采用如下具体步骤.

(1) 求出矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值，设为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，且其相应的重数分别$k_1,k_2,\cdots,k_m(k_1+k_2+\cdots+k_m=n)$.

(2) 对每个特征值λ_i，解齐次线性方程组$(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，求得属于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量，设为$\boldsymbol{\xi}_{i1},\boldsymbol{\xi}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{is_i}(i=1,2,\cdots,m)$.

(3) 若$s_1+s_2+\cdots+s_m=n$，则矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化；若$s_1+s_2+\cdots+s_m<n$，则矩阵$\boldsymbol{A}$不可对角化.

(4) 当矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化时，把n个线性无关的特征向量当做矩阵$\boldsymbol{P}$的列向量，即令
$$\boldsymbol{P}=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1s_1};\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2s_2};\cdots,\xi_{m1},\xi_{m2},\cdots,\xi_{ms_m}),$$
则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1;\lambda_2,\cdots,\lambda_2;\cdots,\lambda_m,\cdots,\lambda_m)$成为对角矩阵，其主对角线上的元素恰好是矩阵$\boldsymbol{A}$的所有互不相等的特征值，并且矩阵$\boldsymbol{P}$的列向量顺序与对角元素顺序相对应.

注 如果仅仅判断矩阵$\boldsymbol{A}$是否可对角化时，则只做上述前三步，并且对重特征值仅需用定理 6 即可.

例 7 判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$$

能否对角化,若能,将它化为相似标准形.

解　由　$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-7,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-7$ 时,解方程 $(-7\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$,可得一个线性无关特征向量(基础解系)为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时,解方程 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$,由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可得两个线性无关特征向量(基础解系)为

$$\boldsymbol{\xi}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关,即 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\2&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-7&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}.$$

习　题　4.2

1. 若四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{I}|=$ ______

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个可逆矩阵,则其特征值中(　　).

A. 有零特征值　　B. 无零特征值

C. 有二重特征值零　　D. 以上均不对

3. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$;对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可相似对角化,求 x.

5. 已知 $p=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数 a,b 及特征向量 p 所对应的特征值;

(2) 问 A 能不能相似对角化?并说明理由.

6. 设 A 为 n 阶矩阵,证明 A^{T} 与 A 的特征值相同.

7. 设 A,B 都是 n 阶矩阵,且 A 可逆,证明 AB 与 BA 相似.

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4 & -10 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$,求可逆矩阵 P 及对角矩阵 D,使得 $P^{-1}AP=D$.

4.3 实对称矩阵的对角化

4.3.1 向量的内积、长度及正交性

定义 6 设有 n 维向量

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

令 $[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$, $[x,y]$ 称为向量 x 与 y 的内积.

内积是向量的一种运算,用矩阵记号来表示,当 x 与 y 都是列向量时,有

$$[x,y]=x^{\mathrm{T}}y.$$

内积具有下列性质(其中 x,y,z 为 n 维实向量, λ 为实数):

(1) $[x,y]=[y,x]$;

(2) $[\lambda x,y]=\lambda[y,x]$;

(3) $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$.

在解析几何中,曾引入向量的数量积

$$x\cdot y=|x||y|\cos\theta,(\theta\text{ 是向量 }x\text{ 与 }y\text{ 的夹角}),$$

且在直角坐标系中,有 $(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

n 维向量的内积是数量积的一种推广. 但 n 维向量没有三维向量那样直观的长度和夹角的概念,因此只能按数量积的直角坐标计算公式来推广. 并且,利用内积来定义 n 维向量的长度和夹角.

定义 7 令 $\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, $\|x\|$ 称为 n 维向量 x 的长度

(或范数).

向量的长度具有以下性质.

(1) 非负性　当 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 时, $\|\boldsymbol{x}\| > 0$; 当 $\boldsymbol{x} = 0$ 时, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$.

(2) 齐次性　$\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \, \|\boldsymbol{x}\|$.

(3) 三角不等式　$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

当 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时,称 $\boldsymbol{x}$ 为**单位向量**.

向量的内积满足

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]^2 \leqslant [\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}][\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}],$$

上式称为**施瓦茨不等式**(证明从略). 由此可得

$$\left|\frac{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}\right| \leqslant 1 \ (\text{当 } \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \neq 0 \text{ 时}),$$

于是有下面的定义:

当 $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0, \|\boldsymbol{y}\| \neq 0$ 时,

$$\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}$$

称为 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**夹角**.

当 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = 0$ 时,称向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ **正交**. 显然,若 $\boldsymbol{x} = 0$,则 $\boldsymbol{x}$ 与任意向量正交.

下面讨论正交向量组的性质. 所谓正交向量组,是指一组两两正交的非零向量.

定理 6　若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是两两正交的非零向量,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

证明　设有 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = 0$,以 a_1^{T} 左乘两端,利用正交性得

$$\lambda_1 a_1^{\mathrm{T}} a_1 = 0,$$

因 $a_1 \neq 0$,故 $a_1^{\mathrm{T}} a_1 = \|a_1\|^2 \neq 0$,从而必有 $\lambda_1 = 0$.

类似可证 $\lambda_2 = 0,\cdots,\lambda_r = 0$.

于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

为了今后的方便,补充如下定义:

若向量空间 $\boldsymbol{V}$ 中存在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,

(2) $\boldsymbol{V}$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出,

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个**基**,称 m 为 $\boldsymbol{V}$ 的**维数**.

通常,采用正交向量组作为向量空间的基,并称其为向量空间的正交基. 例如,n 个两两正交的 n 维非零向量,可构成向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个正交基.

例 8　已知三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中两个向量

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

正交,试求一个非零向量 $\boldsymbol{a}_3$,使 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

解 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$,设 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 应满足齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=0$,即

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

故
$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-3&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

得$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=0,\end{cases}$从而有基础解系$(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 即为所求.

定义 8 设 n 维向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是向量空间 $V(V\subset\mathbf{R}^n)$ 的一个基,如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 两两正交,且都是单位向量,则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是 $V(V\subset\mathbf{R}^n)$ 的一个**规范正交基**.

例如

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

就是 $\mathbf{R}^4$ 的一个规范正交基.

若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 是 V 的一个规范正交基,那么 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 应能由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 线性表示,设表示式为

$$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{e}_r.$$

为求其中的系数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$ 可用 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}$ 左乘上式,有

$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_i\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i=\lambda_i,$$

即
$$\lambda_i=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i].$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基,则可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 构造 V 的一个规范正交基,称为把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 这个基规范正交化.

可以用以下方法把基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 规范正交化.

取
$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1},$$
容易验证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 两两正交.

然后只要把它们单位化,即取
$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1,\quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_r = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|}\boldsymbol{\beta}_r,$$
则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 就是 V 的一个规范正交基.

上述从线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 导出正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的过程称为施密特(Schmidt) 正交化过程. 它不仅满足向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价,还满足对任何实数 $k(1\leqslant k\leqslant r)$,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价.

例 9　设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = (4,-1,0)^{\mathrm{T}}$,试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解　取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$,
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1\\ &= (-1,3,1)^{\mathrm{T}} - \frac{4}{6}(1,2,-1)^{\mathrm{T}} = \frac{5}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2\\ &= (4,-1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}(1,2,-1)^{\mathrm{T}} + \frac{5}{3}(-1,1,1)^{\mathrm{T}} = 2(1,0,1)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$
再把它们单位化,取
$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}\boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},$$
故 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 即为所求.

例 10　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$,求一组非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

解　$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 应满足方程 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,即 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. 它的基础解系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

把基础解系正交化,即为所求. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交,即取

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2]}{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

其中$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2]=1,[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]=2$,于是得

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

定义 9 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$(即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$),那么称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**.

上式用 $\boldsymbol{A}$ 的列向量表示,即是

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{I},$$

亦即$(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j)=(\delta_{ij})$,这也就是 n^2 个关系式

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j, \\ 0, i\neq j \end{cases} (i,j=1,2,\cdots,n).$$

注 方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量都是单位向量,且两两正交.

考虑到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 等价,所以上述结论对 $\boldsymbol{A}$ 的行向量也成立.

由此可见,正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列(行) 向量构成向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个规范正交基.

例 11 验证矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{A}$ 又称**旋转矩阵**.

证明
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 12 设列矩阵 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$,$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$,证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称阵和正交阵,而且有 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$.

证明 可以验证

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H},$$

这说明 $\boldsymbol{H}$ 是对称阵. 又因

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{I}_n - 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{I}_n - 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_n, \end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{H}$ 是正交阵.

$$\boldsymbol{Hx} = (\boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{xx}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{xx}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}.$$

如果把 $\boldsymbol{H}$ 看做一面镜子,站在镜子前面的人与他在镜中所成的像,正好是与镜面的距离相等但方向相反. 这就是 $\boldsymbol{Hx} = -\boldsymbol{x}$ 的含义,所以常称 $\boldsymbol{H}$ 为**镜像矩阵**.

例 13 验证矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

解 $\boldsymbol{P}$ 的每个列向量都是单位向量,且两两正交,所以 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵.

定义 10 若 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,则线性变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Px}$ 称为**正交变换**.

设 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Px}$ 为正交变换,则有 $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|$. 由于 $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示向量的长度,相当于线段的长度. 因此,$\|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ 说明经正交变换后,其线段长度保持不变(保范性),这是正交变换的优良特性.

4.3.2 实对称矩阵的对角化

上一节讨论了一般矩阵的相似对角化问题,若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对称阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,令相似变换矩阵 $\boldsymbol{P} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

下面讨论实对称阵的特殊性质及相似对角化问题.

性质 1 实对称矩阵的特征值都是实数(证明从略).

注 对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,因其特征值 λ_i 是实数,故齐次线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})x = 0$ 是实系数方程组,它有实基础解系,所以 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_i 的特征向量可以取为实向量.

性质 2 属于实对称矩阵的不同特征值的特征向量是正交的.

证明 设 ξ_1, ξ_2 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于两个不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量,则有

$$\boldsymbol{A}\xi_1 = \lambda_1 \xi_1, \quad \boldsymbol{A}\xi_2 = \lambda_2 \xi_2,$$

其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$,所以有

$$\lambda_1 \xi_1^{\mathrm{T}} \xi_2 = (\lambda_1 \xi_1)^{\mathrm{T}} \xi_2 = (\boldsymbol{A}\xi_1)^{\mathrm{T}} \xi_2 = \xi_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \xi_2 = \xi_1^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{A}\xi_2) = \xi_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 \xi_2) = \lambda_2 \xi_1^{\mathrm{T}} \xi_2,$$

即 $$(\lambda_1-\lambda_2)\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_2=0\xrightarrow{\lambda_1\neq\lambda_2}\xi_1^{\mathrm{T}}\xi_2=[\xi_1,\xi_2]=0,$$

即向量 ξ_1 与向量 ξ_2 正交.

性质 3 设 λ 是 n 阶实对称矩阵的 k 重特征值,则矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-k$,从而对于特征值 λ,恰有 k 个属于 λ 的线性无关的特征向量(证明从略).

性质 4 实对称矩阵一定可以对角化.

证明 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,且重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_m(k_1+k_2+\cdots+k_m=n)$. 由性质 3 知,对于特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$,恰有 k_i 个属于 λ_i 的线性无关的特征向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}(i=1,2,\cdots,m)$,则 $\boldsymbol{A}$ 有 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$ 个特征向量且线性无关. 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

注 如果把特征向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}(i=1,2,\cdots,m)$ 正交单位化,得到 k_i 个两两正交的单位特征向量 $\boldsymbol{\eta}_{i1},\boldsymbol{\eta}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{ik_i}(i=1,2,\cdots,m)$. 令 $\boldsymbol{T}=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1k_1},\xi_{21},\cdots,\xi_{mk_m})$,则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵($\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}$),且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{\Lambda}=(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,m)$.

性质 5 对 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,必有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为主对角线上元素的对角矩阵.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,不仅存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵,而且存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵(称 $\boldsymbol{A}$ 可正交相似对角化).

求实对称矩阵相似对角化的正交矩阵的步骤如下:

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$;

(2) 对 λ_i,由 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 求出基础解系 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}(i=1,2,\cdots,m)$;

(3) 将属于每个 λ_i 的特征向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$ 单位正交化,可得到 n 个两两正交的单位特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$;

(4) 令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$,则有 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1;\lambda_2,\cdots,\lambda_2;\cdots;\lambda_m,\cdots,\lambda_m)$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的排列顺序一致.

注 当 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 时,只需对其相应的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 单位化,得 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\xi_1}{|\xi_1|},\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\xi_2}{|\xi_2|},\cdots,\boldsymbol{\eta}_n=\dfrac{\xi_n}{|\xi_n|}$,令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$,则 $\boldsymbol{T}$ 为所求正交矩阵.

例 14 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$,求一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

解 由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)$$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-2$ 时,解方程 $(-2I-A)x=0$,由

$$-2I-A=\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

求得基础解系 $\xi_1=(1,2,2)^T$,将 ξ_1 单位化,得 $\eta_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^T$.

当 $\lambda_2=1$ 时,解方程 $(I-A)x=0$,由

$$I-A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

求得基础解系 $\xi_2=(-1,-1/2,1)^T$,将 ξ_2 单位化,得 $\eta_2=\frac{1}{3}(-2,-1,2)^T$.

当 $\lambda_3=4$ 时,解方程 $(4I-A)x=0$,由

$$4I-A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

求得基础解系 $\xi_3=(2,-2,1)^T$,将 ξ_2 单位化,得 $\eta_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^T$.

令

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

则有 $T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$,且 T 为正交矩阵.

例 15 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$,求一个正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT=\Lambda$ 为对角矩阵.

解 由

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&1\\-1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

当 $\lambda_1 = 2$ 时，解方程 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$，由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 时，解方程 $(-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$，由

$$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化，取 $\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$，

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_2]}\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

再将 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

令
$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{T}$ 为一个正交矩阵.

例 16 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，从而 $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.

由
$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3),$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. 于是

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_1=-1$ 时,由 $-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda_1=3$ 时,由 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,从而 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-1)^n+3^n&(-1)^n-3^n\\(-1)^n-3^n&(-1)^n+3^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

习　题　4.3

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,0,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,-2,1,k)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为 2,则数 $k=$ ________

2. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(b,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量,则数 $b=$ ________.

3. 试用施密特法把下列向量组正交化:

(1) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$;　　(2) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

4. 判断下列矩阵是否为正交阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{3}\\-\dfrac{1}{2}&1&\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{3}&\dfrac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}\dfrac{1}{9}&-\dfrac{8}{9}&-\dfrac{4}{9}\\-\dfrac{8}{9}&\dfrac{1}{9}&-\dfrac{4}{9}\\-\dfrac{4}{9}&-\dfrac{4}{9}&\dfrac{7}{9}\end{pmatrix}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交阵,证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵,且 $|\boldsymbol{A}|=-1$,证明 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

7. 试求一个正交的相似变换矩阵,将下列对称阵化为对角阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x, y；并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$.

9. 设三阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$，与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

10. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

11. 在某国，每年有比例为 p 的农村居民移居城镇，有比例为 q 的城镇居民移居农村，假设该国总人口数不变，且上述人口迁移的规律也不变. 把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n，且 $x_n + y_n = 1$.

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等，即 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$，求 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

12. (1) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{10} - 5\boldsymbol{A}^9$；

(2) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{10} - 6\boldsymbol{A}^9 + 5\boldsymbol{A}^8$.

小　结

1. 本章内容概述

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质，相似矩阵的概念及性质，矩阵可对角化的充分必要条件及相似对角矩阵，实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵.

2. 知识点

(1) 理解矩阵的特征值、特征向量的概念，掌握矩阵特征值的性质，掌握求矩阵特征值和特征向量的方法.

(2) 理解矩阵相似的概念，掌握相似矩阵的性质，了解矩阵可对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

(3) 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

3. 难点

矩阵的特征值和特征向量的求解,相似矩阵的概念及性质,矩阵可对角化的充分必要条件,求解与之相似对角阵和转换矩阵的方法,实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵.

总 习 题 4

1. 选择题

(1) 设 A 是 n 阶方阵,且 $A^2 = I$,则必有 $A =$ (　　).

A. A^T　　B. I　　C. A^{-1}　　D. A^*

(2) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则 A 的特征值为(　　).

A. 1,1,0　　B. $-1,1,1$　　C. 1,1,1　　D. $1,-1,-1$

(3) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 与矩阵(　　)相似.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,则 A 的线性无关的特征向量的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(5) 设两方阵 $A \sim B$,则(　　).

A. A、B 的特征值必相同　　B. A、B 的特征值和特征向量都相同

C. A、B 的特征矩阵必相同　　D. A、B 都相似于同一对角矩阵

2. 填空题

(1) 设向量 $x = (1,2,3,4)$,$y = (1,k,-1,2)$ 是正交的,则 $k =$ ________.

(2) 设矩阵 A 与 B 相似,则 $|A|-|B| =$ ________.

(3) 设矩阵 A 相似于对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(1,2,3)$,则 $|A| =$ ________.

(4) 若 $A^2 = A$,且 A 不是单位阵,则 $|A| =$ ________.

(5) 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1,则 A 的 n 个特征值是 ________.

3. 求下列矩阵在实数域 $\mathbf{R}$ 内的特征值和相应的特征向量:

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$,　　　　(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ -5 & 7 & -1\end{pmatrix}$.

4. λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值.

5. 证明:对角形矩阵

$$\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix}b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n\end{pmatrix}$$

相似,当且仅当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列.

6. 在实数域 $\mathbf{R}$ 内,判断下列哪些矩阵可对角化.

(1)$\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ -5 & 7 & -1\end{pmatrix}$;　(2)$\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$;　(3)$\begin{pmatrix}3 & 6 & 6\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & -12 & -6\end{pmatrix}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

8. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$,设矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2$,试求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

9. 在欧氏空间 $\mathbf{R}^4$ 中,求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ:

(1)$\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)$,$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)$;

(2)$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,2,3)$,$\boldsymbol{\beta}=(3,1,5,1)$.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是欧氏空间的任意两个向量,证明

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|.$$

当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是非零向量时,在什么情况下可以取等号?

11. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2)$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的两个向量,试求一个单位向量 $\boldsymbol{\beta}$,使 $\boldsymbol{\beta}$ 分别与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

12. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,用正交化方法将此基化为标准正交基.

13. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 是一个正交矩阵.

14. 证明:如果上三角形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵,那么 A 一定是对角形矩阵,其主对角线上的元素 a_{ii} 是 1 或 -1.

15. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

求可逆矩阵 P,使 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对角形.

第5章　二　次　型

5.1　二次型及其矩阵表示、标准型

定义1　含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n \tag{5.1}$$

称为二次型.

注　当 a_{ij} 为复数时，f 称为复二次型；当 a_{ij} 为实数时，f 称为实二次型.

例1　$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$，$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 都为实二次型.

在式(5.1)中，取 $a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则式(5.1)可化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为二次型的矩阵形式，记为 $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为该二次型的矩阵. 二次型 f 称为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩，即 $r(\boldsymbol{A})=r(f)$.

例2　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_1x_2+\sqrt{2}x_1x_3-x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$
对应的实对称矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&-1&-2\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-2&5\end{pmatrix}.$$

反之，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&-1&-2\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-2&5\end{pmatrix}$ 所对应的二次型为

$$x^{\mathrm{T}}Ax=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3&1&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&-1&-2\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=3x_1^2-x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+\sqrt{2}x_1x_3-4x_2x_3.$$

定义 2 关系式

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\quad\vdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$$

称为由变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的**线性变换**,并简记为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$. 其中,系数矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$$

称为**线性变换矩阵**. 如果 $\boldsymbol{C}$ 可逆,则称该线性变换为**可逆线性变换**.

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 代入 $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,得

$$f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y},$$

其中,$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$ 是关于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的二次型,对应的矩阵为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

关于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 的关系,给出下列定义.

定义 3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶矩阵,如果存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于矩阵 $\boldsymbol{B}$,或称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

矩阵的合同具有以下的性质.

(1) 反身性 对任意方阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同 $\Leftrightarrow \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}$.

(2) 对称性 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同.

(3) 传递性 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 也为对称阵,且 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$,即合同的两个矩阵的秩相等.

定义 4 只含有平方项的二次型 $f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\cdots+b_ny_n^2$,称为**二次型的标准型**.

接下来讨论对于一般二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$,如何求可逆线性变换 $x=Cy$,并将二次型化为标准形.

习 题 5.1

1. 证明：$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$合同.

2. 写出下列二次型的矩阵：

(1)$f(x) = x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}x$；　　(2)$f(x) = x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}x$.

3. 写出下列二次型的矩阵表示：

(1)$f = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$；

(2)$f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$；

(3)$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶对称矩阵. 如果对任一个 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$，试证 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

5.2 二次型与对称矩阵的标准型

5.2.1 配方法

要研究用可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 把二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准型的方法.

定理 1 任一二次型都可以通过可逆线性变换化为标准型.

配方法化二次型为标准型的步骤如下.

(1) 若二次型 f 含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量进行同样的变换，直到所有变量都配成平方项为止，经过可逆线性变换，就得到标准型.

(2) 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$，则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j, \\ x_j = y_i + y_j, \\ x_k = y_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n \text{ 且 } k \neq i, j), \end{cases}$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按(1) 中方法配方.

定理 2 对任一实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵. 即任一实对称矩阵都与一个对角矩阵合同.

例 3　化二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 为标准型，并求所用的变换矩阵.

解
$$\begin{aligned} f &= x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3 \\ &= x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_2x+4x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2. \end{aligned}$$

令
$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases}$$

则
$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

则 f 化为标准型 $f=y_1^2+y_2^2$，所用变换矩阵为
$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (|\boldsymbol{C}|=1\neq 0).$$

例 4　化二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准型，并求所用的变换矩阵.

解　由于所给二次型中不含平方项，所以令
$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

代入 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 中，可得
$$\begin{aligned} f &= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3=2y_1^2-4y_1y_3-2y_2^2+8y_2y_3 \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2y_3^2+8y_2y_3-2y_2^2 \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2 \end{aligned}$$

令
$$\begin{cases} z_1=y_1-y_3, \\ z_2=y_2-2y_3, \\ z_3=y_3, \end{cases}$$

则
$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

则 f 化为标准型 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$，且变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (|\boldsymbol{C}| = -2 \neq 0).$$

5.2.2 用初等变换化二次为标准型

设有可逆线性变换为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，它把二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$. 已知任一非奇异矩阵均可表示为若干个初等矩阵的乘积，故存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$，使 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，于是

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s,$$
$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s = \boldsymbol{\Lambda}.$$

由此可见，对 $2n \times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ 施以相应于右乘 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$ 的初等列变换，再对 $\boldsymbol{A}$ 施以相应于左乘 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}$ 的初等行变换，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变为对角矩阵 $\boldsymbol{B}$，而单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 就变为所要求的可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$.

例 5 用初等变换法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准型.

解 f 对应的实对称阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 + c_2]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_1-\frac{1}{2}c_2\\ c_3+c_1}]{\substack{r_1-\frac{1}{2}r_2\\ r_3+r_1}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -2\\ 0 & -2 & -2\\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-4c_2]{r_3-4r_2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6\\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad ①$$

这时 $f=2z_1^2-\frac{1}{2}z_2^2+6z_3^2$ 已为标准型(平方和形式).

变换矩阵为 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,即所用可逆线性变换为

$$\begin{cases}x_1=z_1-\frac{1}{2}z_2+3z_3,\\ x_2=z_1+\frac{1}{2}z_2-z_3,\\ x_3=z_3.\end{cases}$$

比较例 1 的结果,可见二次型的标准型不唯一.

将式 ① 继续用一次变换则有

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6\\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[2c_2]{2r_2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6\\ \hdashline 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad ②$$

这时 f 的标准形为 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$,与例 ① 的配方法的结果相同.

细心的读者会注意,这时变换矩阵为 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,即所用可逆线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + 3z_3, \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

初等变换法与配方法所用可逆线性变换不同. 可见,即使将二次型 f 化为同一标准型,其所用的可逆线性变换也不一定相同,即所有变换也不是唯一的.

习 题 5.2

1. 用配方法化下列二次型为标准型.

(1) $2x_1x_2 - 2x_3x_4$;

(2) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.

2. 用初等变换法化下列二次型为标准型.

(1) $x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

(2) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$.

5.3 用正交变换化二次型为标准型

前面介绍了化二次型为标准型的方法之一(配方法和初等变换法),现继续介绍化二次型为标准型的方法.

二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 下,可化为 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$. 如果 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix},$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 就可化为标准型 $b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \cdots + b_ny_n^2$,且其标准型中的系数恰好为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{B}$ 的主对角线上的元素,因此,化二次型为标准型的问题归结为求与 $\boldsymbol{A}$ 合同的一个对角矩阵的问题.

定理 3 对于任意二次型 $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,(a_{ji} = a_{ij})$,总有正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵),使 f 化为标准型 $f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$,其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的特征值.

用正交变换化二次型为标准型的步骤如下.

(1) 将二次型表示为矩阵形式 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,求出 $\boldsymbol{A}$.

(2) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

(3) 求出属于各相异特征值的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$.

(4) 将特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 正交化、单位化,得 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$.

(5) 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$,作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,则得 f 的标准型

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

例 6 将二次型 $f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准型.

解 (1) 写出对应的二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}$.

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=18$.

(3) 求对应的特征向量.

对于 $\lambda_1=9$,解方程 $(9\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$,由

$$9\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-8&2&2\\2&-5&4\\2&4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得基础解系 $$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=18$,解方程 $(18\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$,由

$$18\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得基础解系 $$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(4) 将特征向量正交化.

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\xi}_3]}{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]}\boldsymbol{\alpha}_2$,得正交向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2/5\\-4/5\\1\end{pmatrix}.$$

将其单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\left(-\frac{2}{\sqrt{45}},-\frac{4}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

(5) 作正交矩阵. 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix},\quad 则\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

且在此变换下,原二次型化为标准型 $f=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$.

习 题 5.3

1. 用正交变换法化下列二次型为标准型:

(1) $x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$;

(2) $2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.

2. 求一个正交变换,把二次曲面方程

$$3x^2+4xy+5y^2-4xz+5z^2-10yz=1$$

化成标准方程.

3. 证明:二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

4. 化下列二次型为规范形:

(1) $x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

(2) $2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

5.4 二次型的正定性

在化二次型为标准形的过程中,可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 不唯一,对应的标准形也不唯一,但标准型中非零系数个数是相等的,都等于二次型的秩. 如果限定可逆线性变换为实变换,则二次型的标准型的正系数个数是不变的,从而负系数个数也是不变的,这就是下述的惯性定理.

定理4(惯性定理) 设二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 且 $r(f)=r$,有两个可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 及 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$ 分别化二次型为标准型

$$f=t_1y_1^2+t_2y_2^2+\cdots+t_ry_r^2\quad (t_i\neq 0;i=1,2,\cdots,r)$$

及 $$f = k_1z_1^2 + k_2z_2^2 + \cdots + k_rz_r^2 \quad (k_i \neq 0; i = 1,2,\cdots,r),$$
则 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 中正数的个数与 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数相等.

定义 5　二次型的标准型中正系数的个数称为二次型的**正惯性指数**,负系数的个数称为二次型的**负惯性指数**,正惯性指数与负惯性指数的差称为二次型的**符号差**.

显然,二次型的标准型中,非零系数的个数就是二次型的秩.

如 $f = 2y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2$,则 f 的正惯性指数等于 2,负惯性指数等于 1,符号差等于 1,$r(f) = 3$.

定义 6　将二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的标准型按如下形式给出:

$f = d_1x_1^2 + \cdots + d_px_p^2 - d_{p+1}x_{p+1}^2 - \cdots - d_rx_r^2$,其中 $d_i > 0(i = 1,2,\cdots,r)$.
通过如下的可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{1}{\sqrt{d_i}}y_i \quad (i = 1,2,\cdots,r), \\ x_j = y_j \quad (j = r+1, r+2, \cdots, n) \end{cases}$$

则可将二次型 $d_1x_1^2 + \cdots + d_px_p^2 - d_{p+1}x_{p+1}^2 - \cdots - d_rx_r^2$ 化为

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2. \tag{5.2}$$

称式(5.2)为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**规范形**.

定理 5　任何二次型都可通过可逆线性变换化为规范形,且规范形是由二次型本身决定的唯一形式,与所作的可逆线性变换无关.

注　(1) 规范形是唯一的.

(2) 规范形中的正项个数 p 是 f 的正惯性指数,负项个数 $r-p$ 是 f 的负惯性指数,它们的差 $p-(r-p) = 2p-r$ 是这个二次型的符号差,r 是 f 的秩.

(3) f 的正惯性指数、负惯性指数是被 f 本身唯一确定的.

例 7　化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ 为规范形,并求其正惯性指数.

解　二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ 可化为如下标准型:

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

令
$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{2}z_1, \\ w_2 = \sqrt{2}z_2, \\ w_3 = \sqrt{6}z_3, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}w_1, \\ z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}w_2, \\ z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}w_3, \end{cases}$$

则 f 可化为规范形 $f = w_1^2 - w_2^2 + w_3^2$ 且正惯性指数等于 2.

例 8　化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2$ 为规范形,

并求其正惯性指数.

解 先化标准形得

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+2x_2^2+8x_2x_3+5x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+8x_2x_3+5x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2 \\
&= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2,
\end{aligned}
$$

令
$$
\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3, \\ y_2 = x_2+3x_3, \\ y_3=\sqrt{5}x_3, \end{cases} \qquad \text{即} \quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x},
$$

其中，
$$
\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.
$$

于是,经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y}$,二次型 f 化为规范形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$,且 f 的正惯性指数是 2.

定义 7 设 $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$) 是实二次型,

(1) 如果对任何非零向量 $\boldsymbol{x}$,都有

$$
\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x>0 \quad (\text{或 } \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x<0)
$$

成立,则称 $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为**正定(负定)二次型**,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**正定矩阵(负定矩阵)**.

(2) 如果对任何非零向量 $\boldsymbol{x}$,都有

$$
\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant 0 \quad (\text{或 } \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant 0)
$$

成立,且有非零向量 $\boldsymbol{x}_0$,使 $\boldsymbol{x}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$,则称 $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为**半正定(半负定)二次型**,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**半正定矩阵(半负定矩阵)**.

(3) 如果 $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 既不是半正定又不是半负定,则称 $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为**不定二次型**.

例 9 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$,当 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq 0$ 时,显然有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$,所以该二次型是正定的,其中矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 是正定矩阵.

例 10 二次型 $f=-x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2=-(x_1+x_2-2x_3)^2\leqslant 0$,当 $x_1+x_2-2x_3=0$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)=0$,即 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是半负定的,其对应的矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ 是半负定矩阵.

定理 6 n 元实二次型 $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型的充分必要条件是 $f(x)$ 的正惯性指数等于 n.

注 (1) 二次型的正定性与其矩阵的正定性之间具有一一对应关系. 因此,二次型的

正定性判别可转化为对称矩阵的正定性判别.

(2) 实二次型为正定二次型的充分必要条件是它对应的实对称矩阵与对角矩阵合同,而且该对应矩阵的主对角线上的元素全为正数.

推论 1　n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全为正数.

定理 7　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.

推论 2　若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|>0$.

下面介绍一种判别正定二次型的方法,用这种方法常能较方便地判别二次型的正定性.

定义 8　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 k 个行标和列标相同的子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix} \quad (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 **k 阶主子式**;而子式

$$|\boldsymbol{A}_k|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **k 阶顺序主子式**.

定理 8(霍尔维茨定理)　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于零,即 $|\boldsymbol{A}_k|>0\ (k=1,2,\cdots,n)$.

注　(1) 若二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的,则 $-f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 为负定的;反之,若 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为负定的,则 $-f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 为正定的. 所以,从判别正定二次型的充分必要条件,可得判别负定二次型的以下四个等价命题.

①n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为负定的.

② 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的负惯性指数等于 n.

③ 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全为负数.

④ 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式为负,而偶数阶顺序主子式为正,即

$$(-1)^k\,|\boldsymbol{A}_k|>0\ (k=1,2,\cdots,n),$$

其中 $\boldsymbol{A}_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式.

(2) 对半正定(半负定)矩阵可证明以下三个命题是等价的.

① 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定(半负定)的.

② $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式大于(小于)或等于零.

③ $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值大于(小于)或等于零.

例 11 判别二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-6x_2^2-6x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$ 的正定性.

解 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -6\end{pmatrix},$$

而 $|a_1|=a_{11}=-5<0$, $|a_2|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0$, $|\boldsymbol{A}|=-80<0$,
即奇数阶顺序主子式都小于 0,而偶数阶顺序主子式都大于 0,故 f 为负定二次型.

例 12 当 λ 取何值时,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2\lambda x_2x_3$ 是正定的.

解 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & \lambda\\ -1 & \lambda & 3\end{pmatrix},$$

因 f 为正定二次型,故 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于零,即

$$|a_1|=a_{11}=1>0,\quad |a_2|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0,$$

$$|\boldsymbol{A}|=(-\lambda^2+2\lambda-1)>0,$$

解得 $-(1+\sqrt{2})<\lambda<\sqrt{2}-1$,此即为所求.

最后给出二次型的规范形与其正定性之间的关系定理.

定理 9 设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为 n 元实二次型且 $r(f)=r$,且其规范形为

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2,$$

则:

(1) f 负定 $\Leftrightarrow p=0$,且 $r=n$(即负定二次型的规范形为 $f=-z_1^2-z_2^2-\cdots-z_n^2$);

(2) f 半正定 $\Leftrightarrow p=r<n$(即半正定二次型的规范形为 $f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2, r<n$);

(3) f 半负定 $\Leftrightarrow p=0, r<n$(即 $f=-z_1^2-z_2^2-\cdots-z_r^2, r<n$);

(4) f 不定 $\Leftrightarrow 0<p<r\leqslant n$(即 $f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$).

习 题 5.4

1. 判别下列二次型是否正定:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$.

2. t 满足什么条件时，下列二次型是正定的：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2tx_1x_2+2x_2x_3$.

3. 设 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，求 a.

4. 证明对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{I}$ 合同.

5. 试证：如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么

(1) $k\boldsymbol{A}\,(k>0)$ 是正定矩阵；

(2) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵.

6. 试证：如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶正定矩阵，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

7. 试证：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数等于它的秩.

8. 试证：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是半正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于或等于零.

小　　结

1. 本章内容概述

本章主要介绍二次型及其矩阵表示，合同变换与合同矩阵，二次型的秩，惯性定理，二次型的标准形和规范形，正交变换，用正交变换和配方法化二次型为标准形，二次型及其矩阵的正定性. 本章讨论中所涉及的数均为实数，例如二次型的系数、矩阵的元素都是实数.

2. 知识点

(1) 了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解合同变换和合同矩阵的概念.

(2) 理解二次型的秩的概念，了解二次型的标准形、规范形等概念，了解惯性定理的条件和结论，会用正交变换和配方法化二次型为标准形.

(3) 理解正定二次型、正定矩阵的概念，掌握正定矩阵的性质.

3. 难点

合同变换与合同矩阵、二次型的秩、惯性定理、二次型的标准型和规范型、用正交变换和配方法化二次型为标准形、二次型及其矩阵的正定性理解.

总习题5

1. 选择题

(1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+12x_2x_3$ 是(　　).

A. 正定的　　B. 半正定的　　C. 负定的　　D. 不定的

(2) 对于二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，下列结论正确的是(　　).

A. 化 f 为标准形的可逆线性变换是唯一的

B. 二次型 f 不是正定二次型就是负定二次型

C. f 的标准形是唯一的

D. 以上都不对

(3) 二次型 $f(x_1,x_2)=3x_1^2+4x_2^2$ 的规范形是(　　).

A. $y_1^2-y_2^2$　　B. $-y_1^2-y_2^2$　　C. $-y_1^2+y_2^2$　　D. $y_1^2+y_2^2$

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 的秩等于(　　)；

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(5) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3$ 的标准形是(　　).

A. $y_1^2+y_2^2+2y_3^2$　　B. $-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$

C. $y_1^2+y_2^2$　　D. $y_1^2-y_2^2$

2. 填空题

(1) 二次型 $f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-2xy+4yz$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ________.

(2) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2-4x_4^2$ 的正惯性指数为____________.

(3) 当 λ ________ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+\lambda x_3^2$ 是正定的.

(4) 设有线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=-y_2,\end{cases}$ 则 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{P}=$ ________.

(5) 二次型 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 的秩为________.

3. 用正交变换将下列二次型化成标准形，并写出所用的正交变换：

(1) $f(x_1,x_2)=2x_1^2-4x_1x_2-x_2^2$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

4. 确定方程 $5x^2-4xy+8y^2+\dfrac{20}{\sqrt{5}}x-\dfrac{80}{\sqrt{5}}y+4=0$ 在平面直角坐标系中所代表的曲线的名称.

5. 判定下列二次型的正定性：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+2x_1x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+14x_3^2+7x_4^2+6x_1x_2+4x_1x_4-4x_2x_3$.

6. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 在 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 的条件下的最小值，并求出取得最小值时的 x_1,x_2 和 x_3.

7. 试判断下列实对称矩阵是否为正定矩阵？

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 7 & 3\\ -1 & 3 & -3\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

8. 设 $\boldsymbol{M}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明：

(1) $\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵；

(2) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$ 也是正定的.

9. t 取什么值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的.

10. 设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，如果 λ_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{x}_1$ 是相应的特征向量，且 $\|\boldsymbol{x}_1\|=1$，证明：$f(\boldsymbol{x}_1)=\lambda_1$.

11. 证明：n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件是存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

部分习题的参考答案

第 1 章　行　列　式

习 题 1.1

1. (1)5；(2)0；(3)0.
2. (1)18；(2)-7.

习 题 1.2

1. (1)256；(2)32；(3)-60.

习 题 1.3

1. (1)$-2(x^3+y^3)$；(2)160；(3)8.
2. (1)-270；(2)-799.
3. $\pm 1, \pm 2$.

习 题 1.4

1. 29.
3. (1)x^2y^2；(2)$b^2(b^2-4a^2)$；(3)$x^n+(-1)^{n+1}y^n$.

习 题 1.5

1. (1)$x=3, y=-1$；(2)$x=1, y=2, z=3$；(3)$x_1=3, x_2=-4, x_3=-1, x_4=1$.
2. 仅有零解.
3. $\mu=0, \lambda=1$.

总 习 题 1

1. (1)$-6, 3$；(2)$8k$；(3)-28.
2. (1)D；(2)B；(3)D.
3. (1)1；(2)$4ab$；(3)2；(4)$2x^3-(a+b+c)x^2+abc$.

4. (1)256; (2)-8; (3)$abcd+ab+cd+ad+1$.

5. (1)$1,-1,3$; (2)$1,3\pm2\sqrt{3}$; (3)$-2,2,2,2$.

7. 0. 提示:$a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}+a_{42}A_{43}=0$.

8. (1)$a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$;

(2) $\frac{1}{2}n(n+1)$;

(3)$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

9. (1)$x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=-1$;

(2)$x_1=-\frac{151}{211},x_2=\frac{161}{211},x_3=-\frac{109}{211},x_4=\frac{64}{211}$.

10. 只有零解.

11. $k=-1,\pm\sqrt{2}$.

12. $t\neq-1$.

第2章 矩 阵

习题 2.1

1. $\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \end{array}$,选手按胜多负少排序为 1 2 3 4 5 6.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 & 10 & 5 \\ 30 & 60 & 25 & 20 & 10 \\ 50 & 60 & 0 & 25 & 5 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.2 \\ 2.35 \\ 3 \\ 5.2 \end{pmatrix}$,1,2,3 月份总产值分别为 198.25,271.25,220.5.

习题 2.2

1. (1)$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$; (2)$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. (1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 9 & 13 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 14 & 13 & 8 & 7 \\ -2 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$； (3)(10)； (4) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$； (5) $\begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$；

(6) $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$.

4. $\begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}$； $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

5. (1) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. (1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

10. $-m^4$.

11. 0.

习 题 2.3

1. (1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

2. (1) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$； (3) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $-\frac{16}{27}$.

6. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

习 题 2.4

1. (1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. (1) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

4. (1) -4; (2) 6.

习题 2.5

1. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

2. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$.

4. (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

5. (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

习题 2.6

1. 2.

2. $r(\boldsymbol{A}) \leqslant r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) + 1$.

4. (1) $r(\boldsymbol{A}) = 2, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$;

(2) $r(\boldsymbol{A}) = 2, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$.

5. $\lambda = 3$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 2$；$\lambda \neq 3$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 3$.

6. 当 $\lambda = 5, \mu = -4$ 时，$r(\boldsymbol{A})$ 最小值为 2；

当 $\lambda \neq 5, \mu \neq -4$ 时，$r(\boldsymbol{A})$ 最大值为 4.

总 习 题 2

1. (1) 3； (2) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$； (3) $\frac{9}{4}$.

2. (1) C； (2) C； (3) D.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (1) $(2,5,3)$； (2) $(1,6,0)$； (3) $(4,5,6)^{\mathrm{T}}$； (4) $(0,3,0)^{\mathrm{T}}$.

5. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -6 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} a_n & & \\ & b_n & \\ & & (-c)^n \end{pmatrix}$.

7. 除(3)外，均不成立.

8. $-750, 2^3 \times 3^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{3}, -3 \times 2^4, 2^4 \times 3$.

9. $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

10. (1) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；

(3) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$；(4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

12. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

17. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$；(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

第 3 章　线性方程组

习 题 3.1

1. (1)D；(2)D；(3)C.

2. (1) $x_1=-2t, x_2=t, x_3=0, t\in\mathbf{R}$；

(2) $x_1=\frac{4}{3}t, x_2=-3t, x_3=\frac{4}{3}t, x_4=t, t\in\mathbf{R}$；

(3) 只有零解；

(4) $x_1=\frac{3}{17}t_1-\frac{13}{17}t_2, x_2=\frac{19}{17}t_1-\frac{20}{17}t_2, x_3=t_1, x_4=t_2, t_1, t_2\in\mathbf{R}$.

3. (1) 无解；

(2) $x=\frac{1}{7}t_1+\frac{1}{7}t_2+\frac{6}{7}, y=\frac{5}{7}t_1-\frac{9}{7}t_2-\frac{5}{7}, z=t_1, w=t_2, t_1, t_2\in\mathbf{R}$；

(3) 无解.

4. (1) 当 $a=1$ 时，$x_1=-t_1-t_2, x_2=t_1, x_3=t_2, t_1, t_2\in\mathbf{R}$；

当 $a=-2$ 时，$x_1=t, x_2=t, x_3=t, t\in\mathbf{R}$；

(2) $a=1$ 或 $b=0$ 时，有非零解.

当 $a=1$ 时，$x_1=-t, x_2=0, x_3=t, t\in\mathbf{R}$；

当 $b=0$ 时，$x_1=-t, x_2=(a-1)t, x_3=t, t\in\mathbf{R}$.

5. (1) 当 $\lambda\neq 1, -2$ 时，有唯一解；

当 $\lambda=-2$ 时，无解；

当 $\lambda=1$ 时，有无穷多解，其通解为

$$x_1=-t_1-t_2+1, x_2=t_1, x_3=t_2, t_1, t_2\in\mathbf{R};$$

(2) 当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 10$ 时，有唯一解；

当 $\lambda=10$ 时，无解；

当 $\lambda=1$ 时，有无穷多解，其通解为

$$x_1=-2t_1+2t_2+1, x_2=t_1, x_3=t_2, t_1, t_2\in\mathbf{R}.$$

习 题 3.2

1. $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

2. (1) $\boldsymbol{\beta}=-11\boldsymbol{\alpha}_1+14\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$；　(2) $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2+5\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_4$.

3. $\boldsymbol{\gamma}_1=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-17\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\gamma}_2=23\boldsymbol{\alpha}_2-7\boldsymbol{\alpha}_3$.

4. (1) $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$；　(2) 不能.

5. (1) 当 $b\neq 2$ 时，不能；

(2) 当 $b=2, a\neq 1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表出，表达式为

$$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2;$$

当 $b=2, a=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，但表达式不唯一，表达式为

$$\boldsymbol{\beta}=-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k+2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3, k\in\mathbf{R}.$$

6. $(7,5,2)^{\mathrm{T}}$.

习 题 3.3

1. (1) 线性相关；　(2) 线性无关；　(3) 线性无关.

2. (1) 当 $k=-4$ 时，线性相关；当 $k\neq -4$ 时，线性无关；

(2) 当 $k=-4$ 或 $k=\frac{3}{2}$ 时，线性相关；当 $k\neq -4$ 且 $k\neq\frac{3}{2}$ 时，线性无关；

(3) 当 $k=\frac{3}{2}$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{2}{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3}{11}\boldsymbol{\alpha}_2$；当 $k=-4$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

3. (1) 不正确; (2) 不正确; (3) 正确; (4) 不正确; (5) 正确; (6) 正确; (7) 不正确.
4. 不是.
6. B.
7. 提示:以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为例,它与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价或从定义出发,作 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$,证 $k_2=k_3=k_4=0$.

习 题 3.4

1. (1) 不正确. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$, $r(\boldsymbol{A})=1$,但 $\boldsymbol{A}$ 中后 $n-1$ 个向量,每一个均线性相关,则结论不成立.

(2) 不正确. 还可能为 $s=t$. 如

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$

(3) 正确. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩,也等于 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩.

(4) 正确. 因为线性无关的向量组减少向量的个数仍然线性无关.

2. (1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为向量组的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{7}{2}\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

3. (1) 第 1 列和第 3 列构成一个极大线性无关组.

(2) 第 1,2,3 列构成一个极大线性无关组.

4. $a=2,b=5$.

习 题 3.5

1. (1) $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\7\\0\\19\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-n\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\-n+1\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\-2\end{pmatrix}$.

3. (1) $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

4. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+c_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+c_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1),c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

5. $c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

总 习 题 3

1. (1) $a\neq-4,0,4$; (2) $a=-2$; (3) 等于 n,小于 n.
2. (1)C; (2)B; (3)D.
3. (1) $x_1=1,x_2=2,x_3=-2$;

   (2) $x_1=1,x_2=-1,x_3=0,x_4=2$;

   (3) $x_1=2t_1-t_2,x_2=t_1,x_3=t_2,x_4=1,t_1,t_2\in\mathbf{R}$;

   (4) $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.
4. (1) 当 $a=5$ 时,有无穷多个解,其解为

$$x_1=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}t_1-\frac{6}{5}t_2,x_2=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}t_1-\frac{7}{5}t_2,x_3=t_1,x_4=t_2,t_1,t_2\in\mathbf{R};$$

   (2) 当 $a=1$ 时,有无穷多解,其解为

$$x_1=1-t_1-t_2,x_2=t_1,x_3=t_2,(t_1,t_2\in\mathbf{R});$$

   当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时,有唯一解,其解为

$$x_1=\frac{3}{a+2},x_2=-\frac{a+1}{a+2},x_3=\frac{2}{a+2};$$

   (3) 当 $a=0$ 且 $b=-2$ 时,有无穷多解,其解为

$$x_1=-1-4t_2,x_2=1+t_1+t_2,x_3=t_1,x_4=t_2,t_1,t_2\in\mathbf{R}.$$
5. $(6,-2,-5)^{\mathrm{T}}$.
6. $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.
7. $k=3$.
8. $t\neq12$.
9. (1) 线性无关; (2) 线性无关; (3) 线性相关; (4) 线性相关; (5) 线性相关; (6) 线性无关.

11. (1) $r=2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为一个最大线性无关组,$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$;

(2)$r=2$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个最大线性无关组,$\boldsymbol{\alpha}_2=-2\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3$;

(3)$r=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个最大线性无关组,$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4$;

(4)$r=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个最大线性无关组.

14. (1)$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}-7\\3\\1\end{pmatrix},c\in\mathbf{R}$;　(2)$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},c\in\mathbf{R}$.

15. 当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq-1$ 时,只有零解;

当 $\lambda=-2$ 时,$\boldsymbol{x}=c(1,1,1)^{\mathrm{T}},c\in\mathbf{R}$;

当 $\lambda=1$ 时,$\boldsymbol{x}=c_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}},c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

16. (1) 无解;

(2)$\boldsymbol{x}=c(-7,3,1)^{\mathrm{T}}+(3,-1,0)^{\mathrm{T}},c\in\mathbf{R}$;

(3)$\boldsymbol{x}=c_1(1,0,-2,1)^{\mathrm{T}}+c_2(1,2,0,0)^{\mathrm{T}}+(-2,0,3,0)^{\mathrm{T}},c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

17. 当 $\lambda=-2$ 时,无解;当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时,有唯一解;

当 $\lambda=1$ 时,有无穷多解,其通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}+(-2,0,0)^{\mathrm{T}},c_1,c_2\in\mathbf{R}.$$

19. (5),(6) 正确,其余均不正确.

20. $a=1$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}]$,其中 $\boldsymbol{x}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{B}$ 不唯一. 例如,$\boldsymbol{B}=[2\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{0}]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{x}_1,-\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1]$ 等均满足条件.

第 4 章　矩阵的特征值与特征向量

习题 4.1

1. 4.

2. A.

3. (1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=-1$(三重),$\boldsymbol{p}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 就是对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征值向量.

(2)$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=9$. $\boldsymbol{p}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3=(1/2,1/2,1)^{\mathrm{T}}$.

(3)$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=\lambda_4=1$. $\boldsymbol{p}_1=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_2=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_4=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

5. 25.

习题 4.2

1. 24.

2. B.

3. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -4 & 5 & -3\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

4. $\boldsymbol{X}=3$.

5. (1)$\lambda=-1, a=-3, b=0$. $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

8. $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

习题 4.3

1. $k=\dfrac{2}{3}$.

2. 0.

3. (1)$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$;

(2)$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$.

4. (1) 不是； (2) 是.

7. (1) $\boldsymbol{p}_1=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

正交阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(-2,1,4)$.

(2) $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{3}(-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$.

正交阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(1,1,10)$.

8. $x=4, y=5, \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

9. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

10. $\boldsymbol{A}^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}$.

11. (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\frac{1}{2(p+q)}\begin{pmatrix} 2q+(p-q)r^n \\ 2p+(q-p)r^n \end{pmatrix} r=1-p-q$.

12. (1) $\varphi(\boldsymbol{A})=-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\varphi(\boldsymbol{A})=2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

总 习 题 4

1. (1)C; (2)B; (3)A; (4)D; (5)A.

2. (1) -2; (2)0; (3)6; (4)0; (5) $n-1$ 个为 0、一个为 n.

3. (1) $\lambda_1=7, \boldsymbol{p}_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$; $\lambda_2=-2, \boldsymbol{p}_2=\left(-\frac{4}{5},1\right)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\lambda_1=1, \boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$; $\lambda_2=\lambda_3=2, \boldsymbol{p}_2=(2,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

6. (1) 不可以; (2) 可以; (3) 可以.

7. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2-2^{10} & 2-2^{11} & 0 \\ 2^{10}-1 & 2^{11}-1 & 0 \\ 2^{10}-1 & 2^{11}-2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $-4, -6, -12$.

9. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{\pi}{4}$.

11. $\boldsymbol{\beta}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

12. $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

15. $\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$.

第5章 二次型

习题 5.1

2. (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$;

(2) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

3. (1) $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&-2&1\\-2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

(2) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$;

(3) $f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

习题 5.2

1. (1) $f(\boldsymbol{CY})=2y_1^2-2y_2^2-2y_3^2+2y_4^2,\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}(|\boldsymbol{C}|=4)$;

(2) $f(CY)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2, C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}(|C|=1)$.

习题 5.3

1. (1) $p_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}, p_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}, p_3=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$.

正交矩阵 $T=(p_1,p_2,p_3)$ 和正交变换 $x=Ty$，使

$$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2.$$

(2) $p_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}, p_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$;

$p_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}, p_4=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$.

正交矩阵 $T=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ 和正交变换 $x=Ty$，使

$$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

2. 正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix},$$

使原二次方程变为标准方程 $2u^2+11v^2=1$.

4. (1) 二次型化为规范形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2;$$

所用的变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 2\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 二次型化为规范形

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

习 题 5.4

1. (1) 否； (2) 是.

2. (1) $-\frac{4}{5}<t<0$； (2) $-\frac{\sqrt{5}}{3}<t<\frac{\sqrt{5}}{3}$.

总 习 题 5

1. (1)A； (2)D； (3)D； (4)D； (5)A.

2. (1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 1 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$； (2)2； (3)$\lambda>5$； (4)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$； (5)3.

3. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，$f=3y_1^2-2y_2^2$.

5. (1) 不是； (2) 是.

6. $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_3=0$，最小值为 2.

7. (1) 否； (2) 否.

9. $-2<t<2$.

参 考 书 目

[1] 居余马,等. 线性代数[M]. 北京:清华大学出版社,2002.
[2] 同济大学数学系编. 工程数学线性代数[M]. 北京:高等教育出版社,2007.
[3] 吴赣昌. 线性代数(经济类)[M]. 北京:中国人民大学出版社,2006.
[4] 曹重光,等. 线性代数(经管类)[M]. 北京:科学出版社,2007.
[5] 陈建龙,等. 线性代数[M]. 北京:科学出版社,2007.
[6] 杜红等. 线性代数(理工类少学时)[M]. 北京:科学出版社,2007.
[7] 赵树嫄. 线性代数[M]. 北京:中国人民大学出版社, 1997.
[8] 陈维新. 线性代数简明教程[M]. 北京:科学出版社,2008.
[9] 线性代数. 第五版[M]. 同济大学数学系编,高等教育出版社.
[10] 线性代数. 第四版[M]. 同济大学数学系编,高等教育出版社.
[11] 线性代数 (理工类). 吴赣昌主编[M]. 中国人民大学出版社.